EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Opgaven uit het boek van Fibonacci

Statistical literacy ... hoe dan?

Is er afstemming tussen economie en wiskunde?

Pisa 2015

Vakoverstijgend afsprakenboek in het vmbo

NR.5

JAARGANG 92 - FEBRUARI 2017

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 92 NR 5

IN DIT NUMMER

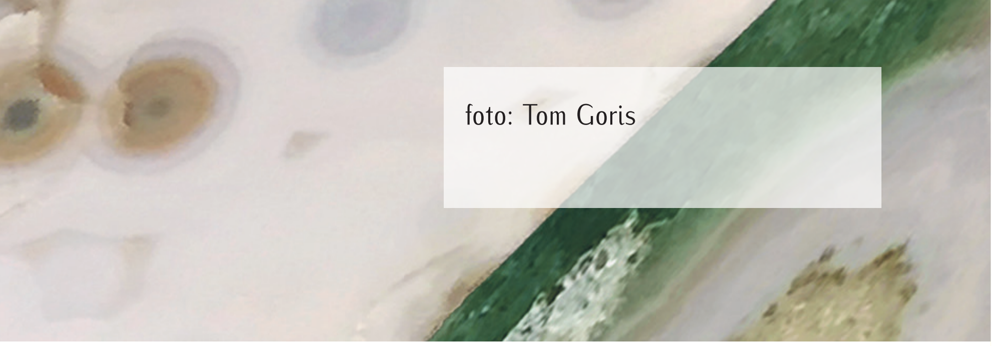


foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

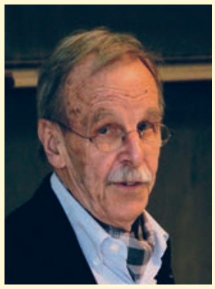


Foto: Fridolin van der Lecq (FI)

Iedereen heeft recht op minstens twee professionele idolen. In mijn geval zijn dat Henk van der Kooij en Martin Kindt. Henk, omdat ik van hem heb geleerd dat als je de kleurplaat omdraait er niet ééns lijntjes zijn... En omdat hij mij uitnodigde op het Freudenthal Instituut om eens te brainstormen over een project in het middelbaar technisch onderwijs, zodat ik ineens ging samenwerken met mensen die ik tot dan toe alleen maar kende als auteur van artikelen in onder andere dit tijdschrift. Zo ook Martin Kindt, met wie Henk en ik urenlang van gedachten wisselden over onze ontwikkelde materialen. Op 27 januari jl vierden we zijn tachtigste verjaardag tijdens een symposium. Daar spraken mede-Martin-bewonderaars als Jan de Lange, Aad Goddijn, Wim Kremers, Paul Drijvers, Luc van den Broeck, Ferdinand Verhulst, Marian Kollenveld en David Webb. Het sleutelwoord in al deze verhalen was de bewondering voor de enorme creativiteit van Martin, van het overal wiskunde zien en de gave hebben om deze wiskunde te vertalen naar toegankelijke materialen voor leerlingen, docenten en ieder ander die wiskunde een warm hart toedraagt. We zijn dan ook heel blij dat Martin nog steeds bijdragen levert voor *Euclides*, zoals het openingsartikel ' Uit het boek van Fibonacci' in dit nummer en het artikel 'Pythagoras in meerdere dimensies' in het volgende nummer. En u vraagt zich natuurlijk af waar de recensie van het boek *Een variabele constante* blijft. Ter ere van Martin gaan we daar drie artikelen aan wijden, geschreven door bewonderaars, allemaal te verschijnen in het komend jaar. Ere wie ere toekomt!

Tom Goris

UIT HET BOEK VAN FIBONACCI

Martin Kindt

Bij Fibonacci hoort een beroemde getallenrij. Maar Fibonacci heeft slechts een beginstuk van 'zijn' rij beschouwd, namelijk als uitkomst van één van de talloze sommen uit zijn werk *Liber Abaci*, het zogeheten konijnenprobleem. In dit artikel bespreekt Martin Kindt twee andere opgaven uit zijn boek: sommen die prima zouden kunnen passen in de huidige lespraktijk.

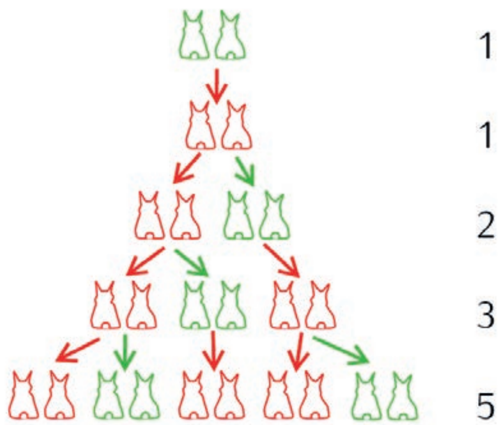
figuur 1 Fibonacci (1180 – 1250)

Liber Abaci

In 1202 verscheen in Italië een opzienbarend boek. De 22-jarige auteur was Leonardo da Pisa alias Fibonacci (afkorting van filio Bonacci). Vader Bonacci had een politieke rol in de republiek van Pisa, kreeg de leiding over een handelscompagnie en vestigde zich uit dien hoofde geruime tijd in de Algerijnse havenstad Béjaïa aan de Middellandse Zee. Hij nam zijn zoon Leonardo mee met het idee dat dit voor hem wel een leerzame ervaring zou zijn. En dat was het! Want zoonlief maakte kennis met de Hindoe-Arabische cijfers en de rekenwijze met het tientallig stelsel. Terug in Pisa schreef hij een dik boek, waarin hij niet alleen het 'moderne rekenen' uitlegt, maar ook talloze vraagstukken bespreekt die wij nu herkennen als algebra en/of meetkunde. Dit boek, getiteld *Liber Abaci*, wordt door historici bestempeld als het eerste boek in Europa waarin het rekenen op schrift, dus zonder telraam of *abacus*, wordt behandeld met de cijfers zoals die nu al enige eeuwen overal in de wereld worden gehanteerd.
De eerste regel van het eerste hoofdstuk van *Liber Abaci* bevat het rijtje van de negen *figure indorum*: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Met deze negen 'Indische figuren' en het teken 0, door de Arabieren *zephir* genoemd (de herkomst van ons woord 'cijfer') kan elk getal worden genoteerd, aldus Fibonacci. Hij legt dan uit hoe het positiestelsel werkt en geeft aan het eind van de eerste paragraaf een aantal voorbeelden van transcripties van Romeins genoteerde getallen naar het nieuwe systeem.
Veelzeggende voorbeelden zijn: MCCXXXIIII = 1234 en MMMMCCCXXI = 4321. En dan zijn er voorbeelden waarin de rol van de nul tot uiting komt, de lezer kan ze zelf verzinnen. Via optel- en vermenigvuldigingstafels wordt het 'cijferend rekenen' omstandig uitgelegd. Tot en met het zevende hoofdstuk kun je spreken van een leergang cijferen. Het vervolg van het boek is een ware schatkamer van allerlei problemen met uitgebreide oplossingen, waaruit blijkt dat de toch jonge Fibonacci uitstekend op de hoogte was van het wiskundige werk van beroemdheden als Euclides, Diophantos en Al Khwarizmi.

Bij de konijnen af

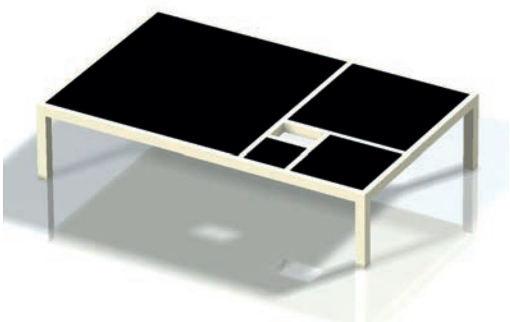
Het bekendste probleem uit *Liber Abaci* is zeker het probleem, waarbij gevraagd wordt het aantal konijnenparen te berekenen in een ommuurde tuin als gegeven is dat elk vruchtbaar paar iedere maand één nieuw (gemengd) paar voortbrengt, en elk pasgeboren paar (in de figuur groen) na één maand geslachtsrijp is. Beginnend met één rijp paar (rood), zijn er na één jaar 377 paren in de tuin, mits er geen konijnen voortijdig dood gaan, en dat is dan de uitkomst van de som uit het boek.



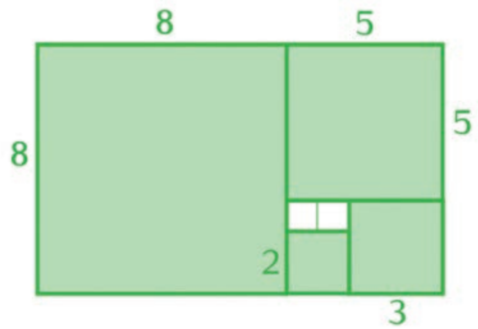
figuur 2 Konijnenparen

Dit vraagstuk heeft later aanleiding gegeven tot het bestuderen van wat nu de rij van Fibonacci heet en waarbij elke term de som is van zijn twee voorgangers. Merk op dat de twee kleuren pijltjes in het plaatje ook elk de Fibonacci-rij opleveren. Fibonacci stopte bij 377, maar juist de oneindig voortgezette rij bleek een rijke bron van wiskunde. De Franse Nederlander Albert Girard

(1595 – 1632) schijnt de eerste te zijn geweest die de oneindige rij van Fibonacci heeft gedefinieerd via recursie. Verrassenderwijs duiken de Fibonacci-getallen op een aantal plaatsen in de natuur op. Bekende voorbeelden zijn de 'spiralen op de schil van een ananas' en de 'stamboom van een mannetjesbij'. En er is zelfs een salontafel die de naam Fibonacci draagt (figuur 3), waarvan het ontwerp is geïnspireerd op figuur 4.[1] Door nieuwe vierkanten (zijde 13, 21, ...) aan de figuur te plakken krijg je rechthoeken waarvan de verhouding tussen lengte en breedte steeds beter het guldensnedegetal ofwel $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ benadert.



figuur 3 Fibonacci-tafel



figuur 4

Dertig vogels

Terug naar *Liber Abaci*. De hoofdstukken 8 tot en met 11 bevatten 'koopmansproblemen'. Onder de vele sommen is er een met de titel 'Over een man die dertig vogels in drie soorten voor 30 dinari koopt'. Het vraagstuk luidt dan als volgt:

Een man koopt 30 vogels: patrijzen, duiven en mussen. Een patrijs kost 3 dinari, een duif 2 dinari en een mus ½ dinari. Hij kocht voor 30 dinari. Hoeveel vogels kocht hij van elke soort?

Van der Waerden zegt dat dit probleem, met andere getallen, al is te vinden in oude Chinese, Indische en Arabische teksten.[2] Ook hier blijkt dat Fibonacci wiskundig belezen was. Een voor ons natuurlijke aanpak is: 'maak er eerst algebra van'. Met p, d en m voor achtereenvolgens de aantallen patrijzen, duiven en mussen, komt er:

$$p + d + m = 30$$
$$3p + 2d + \tfrac{1}{2}m = 30$$

De tweede vergelijking is equivalent met

$$6p + 4d + m = 60$$

Het verschil met de eerste vergelijking maakt nu:

$$5p + 3d = 30$$

Oneindig veel oplossingen?

Nee, want p en d staan voor natuurlijke getallen. Omdat 30 en $3d$ deelbaar zijn door 3, moet $5p$ en dus p, dat ook zijn. Net zo begrijp ik dat d een 5-voud moet zijn. Zo kan ik stellen: $p = 3k$ en $d = 5n$ (met k en n natuurlijke getallen). Uit:

$$5 \cdot 3k + 3 \cdot 5n = 30$$

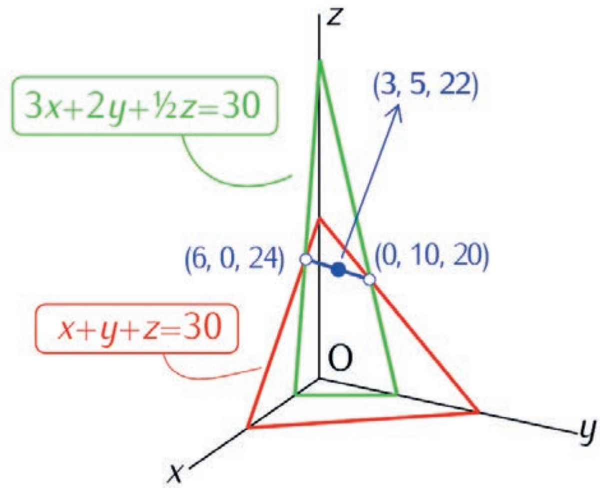
volgt:

$$k + n = 2$$

Aangenomen dat van elk van de vogelsoorten er ten minste één exemplaar wordt gekocht, levert dit op $k = n = 1$. Resultaat: de aankoop bedraagt 3 patrijzen, 5 duiven en 30 – 8 = 22 mussen.

Dit is typisch een voorbeeld van het opstellen van een algebraïsch model naar het oude ideaal van Descartes.[3] Heb je eenmaal een stelsel van vergelijkingen, dan moet je wel even de context laten voor wat die is. Want om 30 vogels af te trekken van 60 dinari, zoals bij de tweede stap is gebeurd, dat lijkt toch idioot. Als leraar hoop je dan dat er leerlingen zijn die niet achteloos over deze drempel heenstappen, zodat er in de klas een 'discours over de methode' kan plaatsvinden!

Er is ook een semi-meetkundige aanpak. Vervang het drietal p, d, m door x, y, z. De vergelijkingen van het stelsel kunnen nu worden voorgesteld door vlakken in een $Oxyz$-stelsel, zie figuur 5.



figuur 5

De mogelijke oplossingen zijn te vinden als punten op het stuk van de snijlijn in het eerste octant. Via $x = 0$ en $y = 0$, worden de punten (6, 0, 24) en (0, 10, 20) op de snijlijn gevonden. Precies in het midden daartussen ligt een punt met drie gehele coördinaten en dat geeft mij de oplossing.[4]

Hoe lost Fibonacci zijn som op? Hij merkt eerst op dat de gemiddelde prijs per vogel 1 dinaro is. Dan beschouwt hij twee mengsels M_i en M_{ii}.

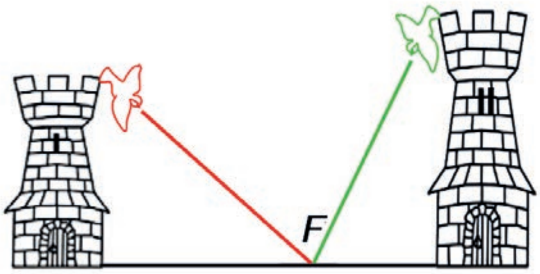
1 *patrijs*, 4 *mussen* (M_i)

1 *duif*, 2 *mussen* (M_{ii})

M_i bevat nu 5 vogels voor 5 dinari terwijl M_{ii} 3 vogels voor 3 dinari bevat. Fibonacci neemt nu 3 keer M_i en 5 keer M_{ii} met als resultaat 30 vogels voor 30 dinari. Zo komt hij dan aan 22 mussen, 3 patrijzen en 5 duiven. Zijn tekst is voor mij enigszins cryptisch en ik heb hier alleen de kern van zijn aanpak verwoord.

Twee vogels

Verderop in het boek is een ander, eveneens klassiek probleem te vinden.
Twee torens staan 50 m uit elkaar en zijn respectievelijk 30 en 40 m hoog. Tussen de beide torens staat een fontein. Twee vogels vertrekken op hetzelfde moment van de top van beide torens en vliegen naar de fontein. Ze vliegen even snel en komen tegelijkertijd aan bij de fontein. Op welke afstand ligt de fontein van die twee torens?



figuur 6

Dit probleem kan worden opgelost met hulp van de stelling van Pythagoras en een snufje algebra.
Stel x = *de afstand van de fontein tot de 30 m-toren* en y = *de afstand van fontein tot de andere toren.* Dan volgt uit de stelling van Pythagoras:

$$30^2 + x^2 = 40^2 + y^2$$

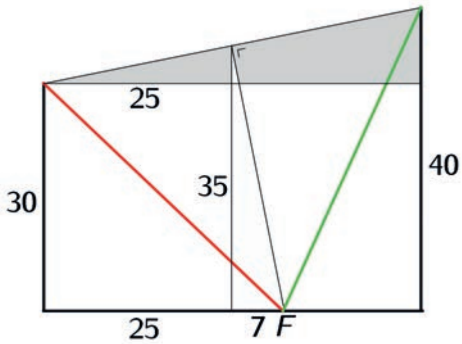
Dus: $x^2 - y^2 = 700$, ofwel

$$(x + y)(x - y) = 700$$

Via $x + y = 50$ komt er nu $x - y = 14$, wat eenvoudig voert naar $x = 32$ en $y = 18$. De fontein ligt dus op 32 meter van de lage toren.
Fibonacci pakte het anders aan. Hij construeerde de plaats van de fontein via de middelloodlijn van de verbinding van de beide toppen, zie figuur 7. Vervolgens gebruikte hij evenredigheden. Vertaald in de nu gangbare wiskundetaal komt dit neer op: noem de afstand van de fontein tot het punt op de grond, precies midden tussen de torens u. Uit de gelijkvormigheid van de grijze driehoeken, zie figuur 7, volgt:

$$50 : 10 = 35 : u$$

Dus $u = 7$ en de afstand van de fontein tot de lage toren is $25 + 7 = 32$.



figuur 7

Generalisatie baart oefening

Dit historische vraagstuk zou je als zodanig in de klas kunnen presenteren. Een nuttige exercitie in algebra krijg je dan als de getallen 30, 40 en 50 achtereenvolgens worden vervangen door *a, b* en *c*. De eerste oplossing leidt tot:

$$x - y = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

Gecombineerd met $x + y = c$ komt er nu:

$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \quad \text{en} \quad y = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

De meetkundige oplossing moet natuurlijk voeren naar dezelfde expressie. Even checken. De gelijkvormigheid van de driehoeken leidt tot:

$$\frac{c}{b-a} = \frac{a+b}{2u}$$

en dus tot:

$$u = \frac{b^2 - a^2}{2c}$$

En er komt dan weer:

$$x = \tfrac{1}{2}c + \frac{b^2 - a^2}{2c} = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$$

Twee gelijkwaardige wegen die naar Pisa leiden, is dat niet goede algebra voor school?

Noten

[1] Ontwerp Nautabene Design, Bergeijk.
[2] Waerden, B.K. van der (1985). *A History of Algebra (from al-Khwarizmi to Emmy Noether).* Berlijn: Springer.
[3] Als beschreven in zijn *Discours de la Méthode* (1637).
[4] Ik realiseer me dat het gebruik van een Oxyz-stelsel nu wel een blinde vlek zal zijn voor de meeste leerlingen. Dat was vóór 1998, op het vwo althans, wel anders. Denk aan lineair programmeren (wiskunde A) en ruimtemeetkunde (wiskunde B). Een mens zou er nostalgisch van worden.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

STATISTICAL LITERACY ... HOE DAN?

ONDERZOEKEND EN NIEUWSGIERIG OMGAAN MET DATA LIJKT ESSENTIEEL

Marianne van Dijke-Droogers
Paul Drijvers
Jos Tolboom

Het statistiekonderwijs is in ontwikkeling. Een veelgenoemd begrip hierbij is *statistical literacy*. Het interpreteren van statistische gegevens is voor iedere wereldburger, nu en in de toekomst, van groot belang. Maar hoe zorgen we ervoor dat leerlingen dit ontwikkelen? Onderzoekend en nieuwsgierig omgaan met data lijkt essentieel. Marianne van Dijke, Paul Drijvers en Jos Tolboom beschrijven een onderzoeksproject, waarin gedifferentieerde onlinetaken gecombineerd worden met onderzoeksactiviteiten in de les. [1]

Onderzoek

In dit project gingen we op zoek naar een aanpak om de *statistical literacy* van leerlingen in de onderbouw van havo en vwo te vergroten en daarbij rekening te houden met verschillen tussen leerlingen. We hebben ervoor gekozen om gedifferentieerde onlinetaken aan te bieden binnen de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO) van het Freudenthal Instituut.[2] Parallel hieraan werkten de leerlingen in de lessen aan allerlei onderzoeksactiviteiten waarbij ze met de hand en met behulp van TinkerPlots data verwerkten.[3] Het onderzoek werd uitgevoerd in een 2 vwo-klas van de Csg Prins Maurits te Middelharnis.

Statistical literacy

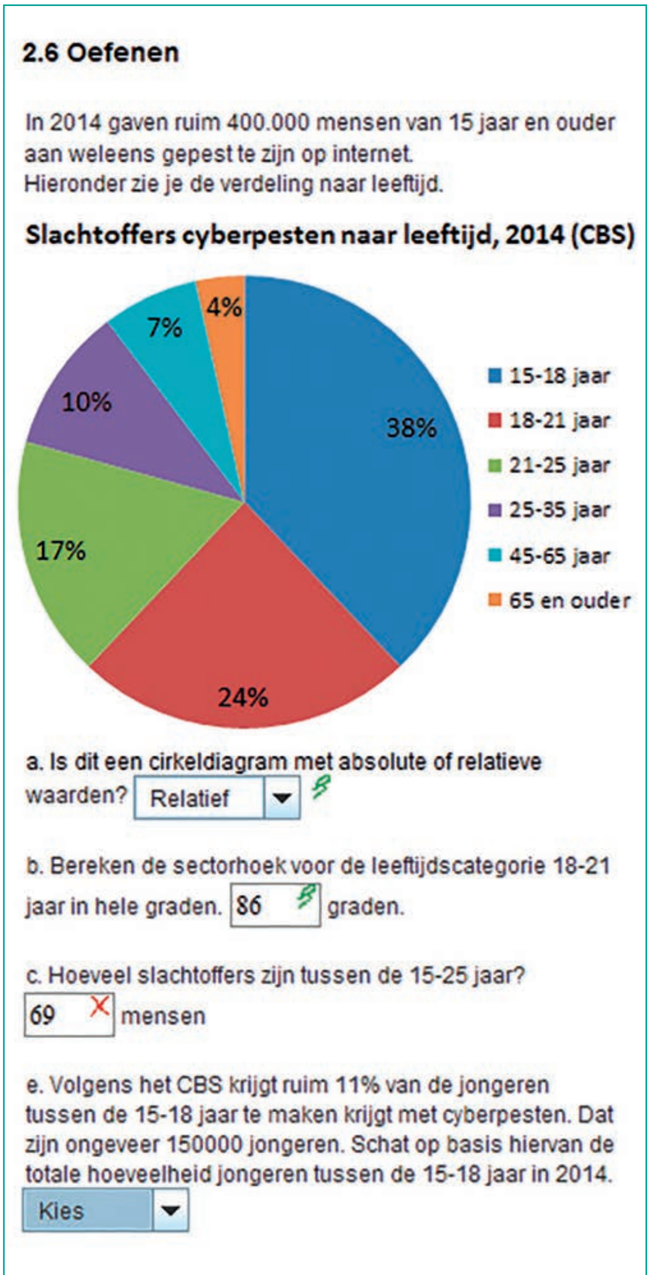
Statistical literacy gaat over het interpreteren van en redeneren met statistische informatie.[4] Volgens Anne van Streun en Carel van de Giessen zou dit statistisch redeneren met datasets vanaf de onderbouw onderdeel moeten zijn van een vernieuwd statistiekprogramma.[5] Overigens is dit vernieuwde wiskunde A-programma, en met name de praktische invulling hiervan, op veel scholen in de bovenbouw nog steeds een *hot item*. Momenteel draait statistiek in de onderbouw vooral om het maken en lezen van statistische weergaven en het berekenen van centrum- en spreidingsmaten. Statistisch onderzoek en het gebruik van ict komen nauwelijks voor in de huidige aanpak, terwijl hier juist een gedegen statistische basis gelegd zou moeten worden, te meer omdat leerlingen met wiskunde B in de tweede fase geen statistiek meer krijgen.

Niveaudifferentiatie en RTTI

Bij het ontwerpen van onderwijs is het goed om rekening te houden met verschillen tussen leerlingen in intelligentie, motivatie en prestatie. Dat kan door niveaudifferentiatie. Hierbij kan het RTTI-model gebruikt worden om het niveau van de leerlingen in kaart te brengen.[6] Steeds meer middelbare scholen en methodeschrijvers maken gebruik van dit model. Het is gebaseerd op vier cognitieve leerniveaus: reproductie (R), toepassen in bekende situaties (T1), toepassen in nieuwe situaties (T2) en inzicht (I). Per leerniveau kan door middel van toetsen inzichtelijk gemaakt worden hoe de leerling op elk niveau scoort. Op basis van RTTI-toetsscores kunnen leerlingen worden geclusterd in niveaugroepen waarna passend onderwijs kan worden aangeboden.[7] In termen van het RTTI-model heeft *statistical literacy* vooral betrekking op leerniveau T2 en I.

DWO-materiaal als huiswerk

Om te redeneren met statistische informatie is enige procedurele kennis essentieel. De procedurele vaardigheden, zoals het berekenen van statistische maten, werden in dit project via huiswerktaken binnen de DWO aangeboden. De opdrachten in een DWO-module omvatten verschillende RTTI-leerniveaus. De DWO-huiswerkmodules bestonden uit twee leerroutes: het basisniveau en het gevorderde niveau. Op basis van zijn of haar RTTI-prestaties van het afgelopen schooljaar werd elke leerling in een van de twee routes ingedeeld. Tijdens dit project werkten de leerlingen gemiddeld meer dan een half uur na elke les thuis aan een DWO-module. In het beginstadium hadden ze extra tijd nodig voor kennismaking met het materiaal; geleidelijk aan nam deze tijdsinvestering af. Bovendien gaven leerlingen aan, met name de gevorderden, dat ze zorgvuldig hun weg door een module kozen door bekende problemen over te slaan. De leerlingen scoorden op de DWO-modules gemiddeld ruim 70%. Deze scores daalden in de loop van het leertraject toen de opgaven moeilijker werden. Bovendien kan de weloverwogen keuze om opgaven over te slaan deze trend hebben versterkt.



figuur 1 Opdracht uit de module 'Cirkeldiagrammen'. Opgave a, b, en c hieruit horen bij niveau T1 en opgave e is op I-niveau

Onderzoek tijdens de lessen

Tijdens de acht lessen van zestig minuten gingen leerlingen aan de slag met diverse onderzoeksactiviteiten. De leerlingen werkten hierbij in groepjes van drie à vier leerlingen met vergelijkbaar niveau. De onderzoeksactiviteiten waren gebaseerd op de vier fasen van de statistische onderzoekscyclus.[8] De leerlingen analyseerden hun gegevens handmatig en met behulp van de software TinkerPlots.[9] Door eenvoudigweg te 'klikken en slepen' konden ze data razendsnel op allerlei manieren weergeven.

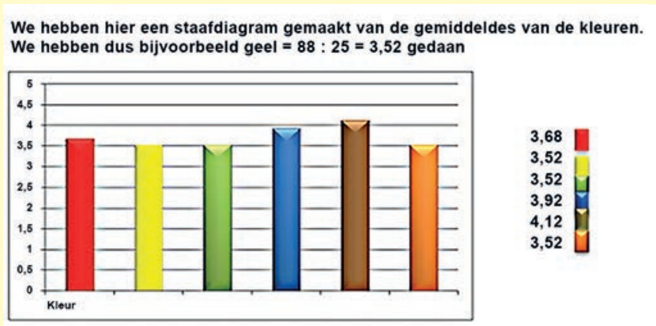
In de beginfase bestonden de uitwerkingen van de leerlingen hoofdzakelijk uit korte antwoorden met een berekening van het gemiddelde. De visuele representaties beperkten zich tot staaf- en cirkeldiagrammen. Gedurende het project veranderde de houding van de leerlingen ten opzichte van de datasets. Van gegevens die je nodig hebt om een vraag te beantwoorden, werd een dataset een informatiebron die allerlei nieuwe onderzoeksvragen oproept. De datasets maakten de leerlingen nieuwsgierig en enthousiast. Van deze klassikale bijeenkomsten heb ik als docent het meest genoten en geleerd.

Bij de eindopdracht mochten de leerlingen kiezen uit diverse datasets in TinkerPlots. Ze formuleerden hierbij zelf een vraag met deelvragen om te onderzoeken. De leerlinguitwerkingen in deze eindopdracht bevatten gedetailleerde beschrijvingen en rijke visualisaties met een grote diversiteit aan grafieken. De gevorderde leerlingen scoorden bij deze eindopdracht, met name op I-niveau, aanzienlijk hoger dan de basisleerlingen.

Onderzoeksvraag: Welke kleursamenstelling heeft een mini-zakje M&M's?

1. Noteer drie deelvragen die aansluiten bij de onderzoeksvraag.
2. Verzamel data uit de klas.
3. Orden de data die je nodig hebt om de deelvragen te beantwoorden.
4. Geef kort en bondig antwoord op de drie deelvragen en onderbouw je conclusie met minimaal twee grafische representaties.

Uitwerking



figuur 2 Onderzoeksopdracht en leerlinguitwerking uit les 1

Toets

Aan het einde van het project werd een toets afgenomen. We hebben gekozen voor een RTTI-toets zodat de resultaten enigszins vergeleken konden worden met eerder behaalde toetsresultaten. In tabel 1 staat 'Pre gem.' voor de gemiddelde score op negen voorgaande RTTI- toetsen voor wiskunde. De RTTI post-test ('Post') toont de score op de statistiektoets.
Op basis van de in tabel 1 gepresenteerde pretestscore was de verwachting dat leerlingen op de onderdelen T2 en I, de onderdelen die betrekking hebben op *statistical literacy*, bij de posttest gemiddeld 55% zouden scoren. De leerlingen scoorden hier echter 9% hoger, namelijk 64%. Dit suggereert dat de leerlingen in dit project een grotere vooruitgang hebben geboekt dan verwacht werd op basis van eerder behaalde resultaten. Het verschil in vooruitgang tussen basisniveau (12%) en gevorderde niveau (4%) kan veroorzaakt zijn door het 'plafondeffect' of misschien gaven de gebruikte toetsopgaven in de RTTI statistiektoets te weinig ruimte aan begaafde leerlingen.

Tot slot

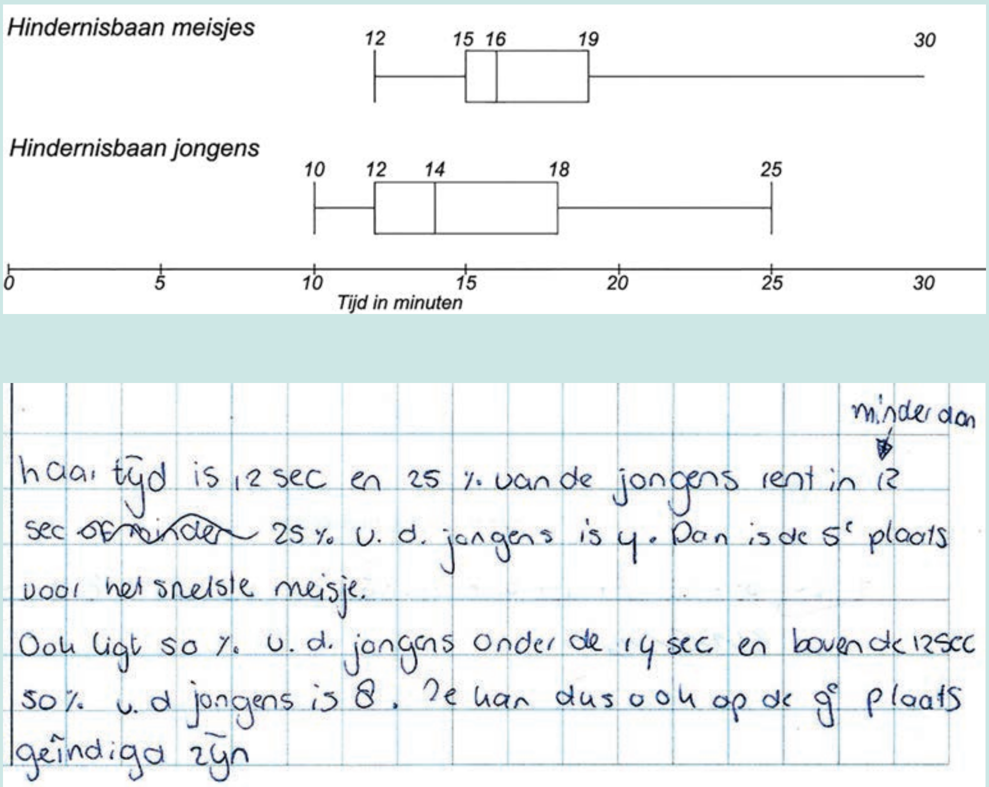
Tijdens dit project zijn de leerlingen onderzoekend en nieuwsgierig aan de slag gegaan met dataverwerking. Hoewel nog wat speculatief, suggereren de resultaten dat de lessenserie, met gedifferentieerd procedureel huiswerk en onderzoeksopdrachten in de les, heeft geleid tot verhoging van *statistical literacy*.[10] Zowel de basis- als de gevorderde leerlingen vertoonden sterke vooruitgang. Dit was voor de basisleerlingen met name zichtbaar bij de toets en voor de gevorderden bij de afsluitende onderzoeksopdracht. We hopen vooral dat dit artikel ter inspiratie kan dienen voor docenten die willen experimenteren met onlinetaken en onderzoeksactiviteiten in de les.

tabel 1 RTTI-scores voor en na het project

	Hele klas (n= 25)		Basisniveau (n=16)		Gevorderde (n=9)	
	Pre gem.	Post	Pre gem.	Post	Pre gem.	Post
Score op R and T1 in procenten (sd)	79 (16)	85 (10)	79 (13)	85 (10)	80 (20)	86 (10)
Score op T2 and I in procenten (sd)	55 (18)	64 (21)	47 (16)	59 (24)	69 (10)	73 (12)

(Vervolg vraag 4....)

Op de sportdag van klas 2 is een hindernisparcours uitgezet. Hieronder zie je twee boxplots met daarin de tijden die de leerlingen nodig hadden voor dit parcours. In totaal hebben 28 leerlingen dit parcours afgelegd, 16 jongens en 12 meisjes.

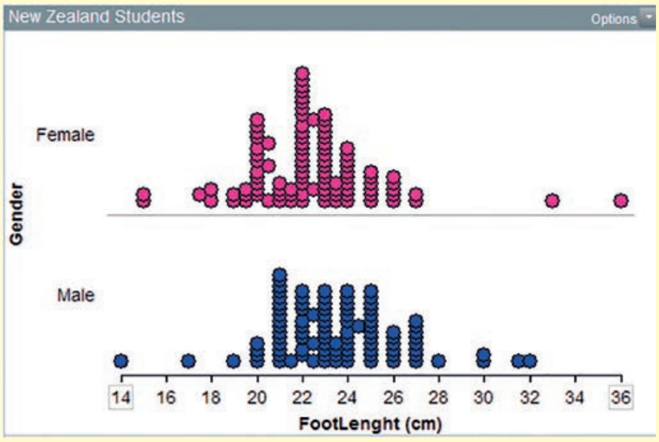


figuur 3 Leerlingmateriaal bij een I-vraag uit de statistiektoets

Naar aanleiding van een dataset in TinkerPLots over de Olympische Spelen voerde een groepje de volgende discussie: 'Hier zie je wel heel duidelijk hoe de eindtijden ontwikkelen. Maar waarom zit hier een knik in de grafiek?.... Als deze trend doorzet gaan we deze zomer opnieuw records verbreken... Dit staafdiagram is echt niet duidelijk. We willen juist zichtbaar maken wat het verschil is tussen mannen en vrouwen, en hier hebben we nog geen duidelijk beeld. Probeer eens een cirkeldiagram...'

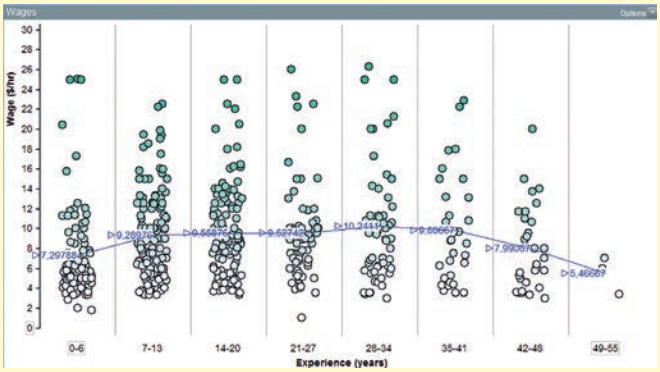
figuur 4 Levendige discussies tijdens de onderzoeksactiviteiten

Deelvraag: Hebben jongens of meisjes een grotere voetlengte en hoeveel dan gemiddeld meer?



Zoals u kunt zien hebben jongens grotere voeten dan meiden. Bij jongens ligt het gemiddelde op 23,5 cm en bij meiden 22,5 cm. Dit houdt in dat meiden ongeveer schoenmaat 35 hebben en de jongens 37, jongens hebben dus gemiddeld 2 maten groter dan meiden en gemiddeld 1 cm langere voeten. We hadden al wel verwacht dat jongens grotere voeten zouden hebben, wel valt het ons op dat de kleinst gemeten voet van een jongen is en de grootst gemeten voet van een meisje. (uitwerking basis groep)

Deelvraag: Heeft de werkervaring (hoeveel jaar je al hebt gewerkt) invloed op het uurloon?
De grafische representatie hiernaast geeft de hoeveelheid werkervaring vergeleken met het uurloon weer. Dit hebben we gedaan door middel van 8 categorieën te maken met als minimum 0 jaar werkervaring en als maximum 55 jaar werkervaring. Ook is er een blauwe lijn te zien die het gemiddelde per categorie aangeeft....



....In deze grafische representatie zien wij dat de hoeveelheid mensen erg verschilt per categorie. De meeste mensen hebben namelijk minder dan 20 jaar werkervaring. Maar omdat de aantallen erg verdeeld zijn moeten we vooral kijken naar de gemiddelden. Deze geven een heel opvallend resultaat. We zien namelijk dat de mensen uit de eerste categorie gemiddeld een stuk minder verdienen dan de mensen uit de daarop volgende categorie, die al langer hebben gewerkt. Deze lijn blijft stijgen tot aan de categorie van 28 t/m 34 jaar werkervaring. Hier is namelijk een omkeer punt en gaat de lijn opeens dalen. Conclusie: Wij concluderen dat je werkervaring zeker invloed heeft op je uurloon dit is duidelijk te zien aan de stijgende blauwe lijn. Dit vinden wij ook vrij logisch want als je meer werkervaring hebt kan je ook meer presteren dus ga je ook meer verdienen. Maar wat we minder logisch vinden is dat de lijn zo rond de 33 jaar werkervaring opeens gaat dalen. Hier hebben wij geen verklaring voor, want wij dachten juist dat hoe ouder de mensen worden hoe meer geld ze automatisch gaan verdienen. (Uitwerking gevorderde groep)

figuur 5 Leerlinguitwerkingen afsluitende onderzoeksopdracht

Noten

[1] Dit onderzoeksproject werd mede mogelijk gemaakt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO) onder projectnummer 636.000.045

[2] Voor meer informatie over de DWO, zie www.dwo.nl/en

[3] Voor meer informatie over TinkerPlots zie www.TinkerPlots.com

[4] Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy, meanings, components, responsibility. *International Statistical Review*, 70(1), 1–51.

[5] Streun, A. van, & Giessen, C. van de (2007). Een vernieuwd statistiekprogramma: Deel 1. *Euclides*, 82(5), 176–179.

[6] Drost, M., & Verra, P. (2015). *Handboek RTTI.* Bodegraven: Docentplus.nl.

[7] Berben, M., & Teeseling, M. (2014). *Differentiëren is te leren.* Amersfoort: CPS.

[8] Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., en Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association.

[9] Konold, C., Harradine, A., & Kazak, S. (2007). Understanding distributions by modelling them. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(3), 217–230.

[10] Leraren die het ontwikkelde materiaal willen zien of zelf proberen kunnen een en ander downloaden vanaf *http://www.uu.nl/staff/MJSvanDijkeDroogers*.

Over de auteurs

Marianne van Dijke-Droogers is wiskundedocente bij de Csg Prins Maurits te Middelharnis en sinds 1 september 2016 promovenda bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *m.j.s.vandijke-droogers@uu.nl*
Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en wetenschappelijk onderzoeker bij Cito.
E-mailadres: *p.drijvers@uu.nl*
Jos Tolboom is leerplanontwikkelaar wiskunde en informatica bij SLO, het nationale expertisecentrum leerplanontwikkeling. E-mailadres: *j.tolboom@slo.nl*

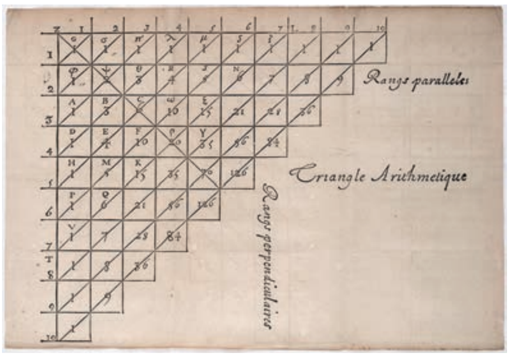
WORTELS VAN DE WISKUNDE

3: DE DRIEHOEK VAN PASCAL

Desiree van den Bogaart

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: de driehoek van Pascal.

De meeste wiskundedocenten zullen wel weten dat de stelling van Pythagoras al lang bekend was bij de Babyloniërs en Egyptenaren, ver voordat de beroemde Griek geboren werd. En ook tijdens zijn leven schijnt Pythagoras zelf weinig op te hebben gehad met het bewijzen van deze stelling. De driehoek van Pascal is ook zo'n stukje wiskunde dat een naam draagt van een grote Europese denker, terwijl hij feitelijk al eeuwen eerder bekend was in Oosterse culturen. Figuur 1 laat de driehoek van Blaise Pascal zelf zien, het is een fragment uit zijn werk *Traité du triangle arithmétique* uit 1665. De vorm van de driehoek wijkt af van hoe je die tegenwoordig tegenkomt in lesboeken. Figuur 2 komt uit *Getal*



figuur 1

figuur 2

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
⋮

De driehoek van Pascal: elk getal is de som van de twee getallen erboven

figuur 3

& Ruimte. Daarin ligt de nadruk op de eigenschappen symmetrie en de som van een rij. Figuur 3 komt uit *Wortels van de wiskunde*, met de vermelding dat elk getal de som is van de twee getallen erboven. Hier duikt de driehoek van Pascal op in een sectie over Arabische wiskunde. Daarover straks meer.

figuur 4

Oosterse wiskunde

In figuur 4 herkennen we aan de vorm direct dat we te maken hebben met de driehoek van Pascal, ook al zijn de gebruikte tekens ons op het eerste gezicht volslagen onbekend. Deze combinatie van herkenning en verwondering geeft aanleiding voor mooie wiskundige vragen en interessante denkactiviteiten. Het is een Chinese versie van de driehoek van Pascal, uit ongeveer de elfde eeuw. U kunt dit plaatje laten zien aan leerlingen die de driehoek van Pascal al kennen en daarmee het Chinese getalstelsel laten ontcijferen. Andersom kunt u ook de driehoek ontdekken als u een eenvoudige aanname doet over de betekenis van een enkel streepje. (Deze activiteit is al haalbaar met leerlingen uit groep 6, is mijn ervaring. De klasgenoten van mijn oudste zoon vragen regelmatig of ik nog een keer zo'n leuke les wil komen geven.)
Maar de bron waar we nu echt naar willen kijken, ziet u in figuur 5. Gun uzelf (en straks ook uw leerlingen) de kans om eerst eens rustig naar deze afbeelding te kijken, zonder verder te lezen wie de auteur is, wat de datering is en de context. Noteer minimaal vijf dingen die u opvallen. Deze afbeelding laat een pagina zien uit het werk van Ahmad al-Ab'dari ibn Mun'im, een Marokkaanse wiskundige (en arts) die leefde in Marrakech rond het jaar 1200. Het eerste dat opvalt, is dat er een combinatie staat van Arabische tekst en symbolen die iedereen herkent als 'onze' eigen getallen. Daarmee draaien we eigenlijk de geschiedenis om, want wij hebben onze getallen overgenomen van de Arabieren, die ze op hun beurt weer van Indiase geleerden hebben overgenomen. (Meer hierover vindt u in *Wortels van de wiskunde*.) Verder constateren we dat de cijfers 4 en 5 nog een andere vorm hebben dan tegenwoordig. Dat is eenvoudig te zien op de een-na-

figuur 5

onderste rij. Ook dit draagt bij aan het leren van de herkomst van onze symbolen. Ze zijn gaandeweg veranderd totdat ze hun definitieve vorm kregen.

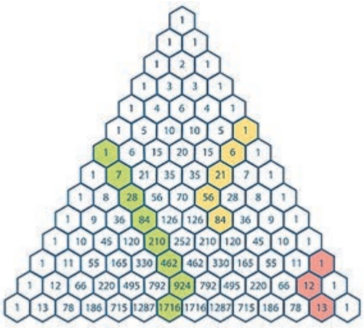
Kwastjes met verschillende kleuren

Ibn Mun'im beschrijft hier een probleem waarbij er kwastjes worden samengesteld van verschillende kleuren zijde. In Amerika zijn dit gebruikelijke voorwerpen: bij diploma-uitreikingen worden er speciale kwastjes (*tassels*) gemaakt voor aan de baretten van de leerlingen, in de kleuren van de school en met het jaar van de uitreiking erop. Ibn Mun'im heeft dit echter niet beschreven vanwege de bruikbaarheid in het dagelijks leven rond 1200; het ging hem om het onderzoeken van manieren om het aantal

For a tassel of 10 colors										1	1
For a tassel of 9 colors									1	9	10
For a tassel of 8 colors								1	8	36	45
For a tassel of 7 colors							1	7	28	84	120
For a tassel of 6 colors						1	6	21	56	126	210
For a tassel of 5 colors					1	5	15	35	70	126	252
For a tassel of 4 colors				1	4	10	20	35	56	84	210
tassel of 3 colors			1	3	6	10	15	21	28	36	120
2 colors		1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
1 color	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
	using up to color 1	using up to color 2	using up to color 3	using up to color 4	using up to color 5	using up to color 6	using up to color 7	using up to color 8	using up to color 9	using up to color 10	total no. of tassels

figuur 6

mogelijke combinaties te berekenen. Uiteindelijk paste hij de verkregen wiskundekennis toe op het onderwerp taal: hij wilde weten hoeveel woorden er mogelijk waren in zijn taal, gebruikmakend van alle letters uit het (Arabische) alfabet. Ibn Mun'im heeft in figuur 5 een tabel gemaakt waarmee hij kan uitrekenen hoeveel verschillende kwastjes er mogelijk zijn bij tien kleuren zijde. Figuur 6 is een Engelse vertaling ervan door Randy K. Schwartz, om het wat makkelijker te maken. We zien nu ook duidelijk dat de laatste kolom afwijkt van wat we gewend zijn. Dit is niet zoals die in de (gekantelde) driehoek van Pascal staat, of toch? De laatste kolom lijkt een positie te zijn verschoven. Alle getallen staan een rij lager. Is dat een fout?
Als je naar de een-na-bovenste rij kijkt, zie je 1 | 9 | 10. Er geldt 1 + 9 = 10. Een rij later staat 1 | 8 | 36 | 45. Ook hier geldt: 1 + 8 + 36 = 45. En dat lukt op alle rijen naar beneden ook. Er is dus, door de verschuiving van de achterste kolom, een nieuw patroon ontstaan: het laatste getal is de som van alle voorgaande getallen in die rij. Blijkbaar is dit geen fout, maar een bewuste weergave, waarbij gebruik wordt gemaakt van deze opteleigenschap. Deze eigenschap is ook zichtbaar in de driehoek van Pascal, maar daar ontstaat een rij met een knik erin, omdat de achterste kolom op de 'juiste' plaats staat. Zie figuur 7. Dit patroon wordt daarom ook wel het hockeysticklemma of het kerstsoklemma genoemd. Deze



figuur 7

schrijfwijze van Ibn Mun'im laat zien dat om te berekenen hoeveel kwastjes van vier kleuren er te maken zijn bij een keuze uit tien kleuren, je het antwoord vindt door bij elkaar op te tellen hoeveel kwastjes van drie kleuren er te maken zijn van respectievelijk 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10 kleuren. In onze moderne notatie:

$$\binom{10}{4} = \binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}+\binom{8}{3}+\binom{9}{3}.$$

Je kunt dit beter begrijpen, door de tien kleuren zijde op een rijtje te leggen. Laten we ze even nummeren van 1 t/m 10. We willen een kwastje van vier kleuren maken. Laten we zeggen dat kleur 4 de kleur met het hoogste nummer is die in ieder geval gebruikt wordt in het kwastje. Dan moeten de drie kleuren met een lager nummer ook allemaal gekozen worden, dat kan op $\binom{3}{3}$ manieren.

Als kleur 5 de kleur met het hoogste nummer is die in ieder geval gebruikt wordt, dan moeten er van de lagere nummers kleuren in ieder geval nog drie gekozen worden, dus dat zijn $\binom{4}{3}$ manieren, enzovoorts tot en met $\binom{9}{3}$.
Zie ook figuur 8 ter illustratie. Als we al deze gevallen bij elkaar optellen, hebben we daarmee alle mogelijkheden om vier kleuren uit tien te kiezen, oftewel $\binom{10}{4}$.

figuur 8

Toepassing in de les

Voor de onderbouw is het begrijpen van bovenstaande natuurlijk geen haalbaar leerdoel. Maar het is hopelijk wel duidelijk geworden dat de tabel van Ibn Mun'im een rijke bron is, die uit zichzelf allerlei vragen oproept bij leerlingen en handreikingen biedt aan de docent om met de klas op zoek te gaan naar patronen. U bepaalt zelf wat voor uw groep passende leerdoelen zijn. Probeer daarbij ook eens af te stappen van wat er in het boek wordt behandeld. Het werken met deze bron kan op elk niveau een interessante wiskundige denkactiviteit opleveren, die bovendien uitnodigt tot gesprekken over wiskunde als menselijke activiteit, die culturen verbindt. In de bovenbouw is deze bron zeer geschikt om het onderwerp combinatoriek mee te introduceren. Eventueel komt u er na een aantal lessen op terug, als de driehoek van Pascal en combinaties bekend zijn, om te kijken of het hockeysticklemma kan worden ontdekt en begrepen.
Jeanine Daems en ik hebben over deze Arabische oerversie van de driehoek van Pascal een workshop gegeven op de meest recente studiedag van de NVvW in november 2016. Over de Chinese getallendriehoek (en andere primaire bronnen) gaven we in 2014 een workshop bij het NUwiskundecongres van Noordhoff. Het materiaal is opvraagbaar bij ons.

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016) *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Schwartz, R.K. (2010). *Combining Strands of Many Colors: Episodes from Medieval Islam for the Mathematics Classroom*. Geraadpleegd op 21 november van *http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/Schwartz_Modules/combos%2Bsums%2B%28Stats%2BFinite%29.pdf*
- Wilson, R. en Watkins J. (eds). (2015). *Ancient combinatorics*. Oxford: Oxford Publishers.

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

UITDAGENDE PROBLEMEN

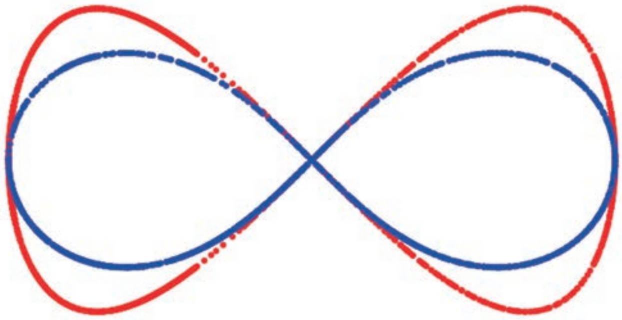
Jacques Jansen

DE ENE LEMNISCAAT IS DE ANDERE NIET, DEEL II

In het eerste deel van dit artikel, in de vorige *Euclides*, stond de lemniscaat van Bernouilli centraal. In 2015 stond er een lemniscaat van Gerono in een eindexamen-opgave vwo. Jacques Jansen vond het tijd voor een vergelijkend warenonderzoek.

Gaat u door het lint of raakt u ergens in verstrikt? Door het lint bent u misschien al gegaan bij de lemniscaat van Bernoulli in *Euclides* 4, zie figuur 1. De examenlemniscaat, zie de opgave in figuur 2, doet meer denken aan een strik.

figuur 1 De lemniscaat uit *Euclides* 92(4)



figuur 3 Lint en strik samen

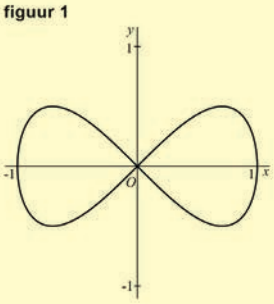
Lemniscaat

Punt P beweegt volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \cdot \cos t \end{cases} \quad \text{met } 0 \le t < 2\pi$$

In figuur 1 is de baan van P getekend. Deze baan wordt **lemniscaat** genoemd.

figuur 1



Tijdens de beweging passeert punt P vier keer de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{4}$.

4p 14 Bereken exact voor welke waarden van t dit het geval is.

De snelheid van P op tijdstip t is gelijk aan $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.
P gaat twee keer door de oorsprong O, beide keren met even grote snelheid.

6p 15 Bereken exact deze snelheid.

Een vergelijking van de baan van P is: $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

3p 16 Bewijs dit.

figuur 2 Examen vwo B 2015 tweede tijdvak

De examenlemniscaat is een speciale lissajousfiguur. Ze werd grondig bestudeerd door de Franse wiskundige Camille-Christophe Gerono (1799-1891). Nog even het geheugen opfrissen. Een lissajousfiguur is een combinatie van twee harmonische bewegingen in twee richtingen onder een rechte hoek. De bijbehorende parametervoorstelling is van de vorm:

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot \cos(t) \\ y(t) = a \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \text{ met } 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

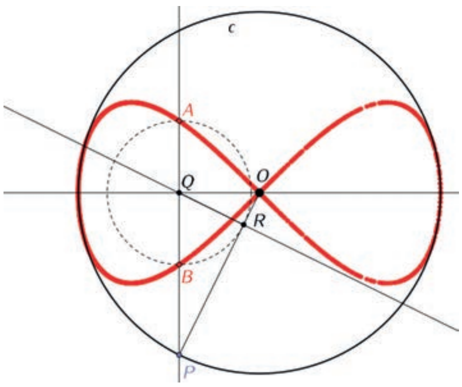
met a een reëel getal. Bij het examen is voor a de waarde 1 gekozen en dat levert een lemniscaat op van breedte 2. De vraag is: hoe construeer je die examenlemniscaat?

Constructie van de lemniscaat van Gerono

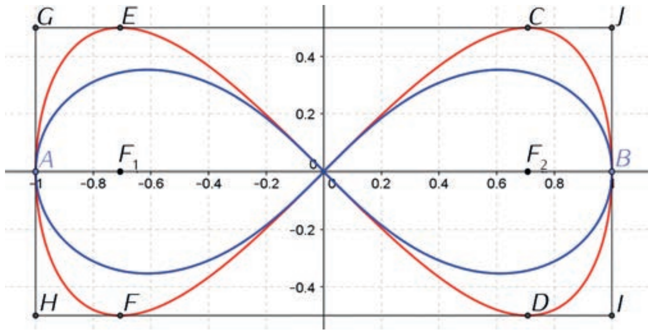
We beperken ons tot de examenlemniscaat, dus met a = 1. We tekenen in *GeoGebra* een eenheidscirkel c met de oorsprong O als middelpunt. We nemen een willekeurig punt P op de cirkel. Vervolgens:

– Teken een lijn l door punt P, loodrecht op de X-as. Noem het snijpunt van lijn l met de X-as Q.
– Teken een lijn door Q die loodrecht staat op lijn PO. Het snijpunt noemen we R.
– Teken een cirkel met Q als middelpunt en de lengte van QR als straal. De snijpunten van deze cirkel met lijn l noemen we A en B.
– Zet het spoor aan in punt A en laat punt P de cirkel doorlopen.

Het resultaat ziet u in figuur 4.



figuur 4



figuur 5

Maar hoe bewijs je nu dat dit spoor dezelfde baan is als die van de examenopgave? Het ligt voor de hand om te proberen de coördinaten te vinden van punt *A*.

Bewijs

Het variabele punt *P* duiden we aan met het getallenpaar (cos(t), sin(t)). Dan hoort bij punt *Q* het getallenpaar (cos(t), 0). Bekijk dan de rechthoekige driehoek *POQ*.
Er geldt:
$QR \times PO = PQ \times OQ$.

$$AQ = QR = \frac{|\sin(t)| \cdot |\cos(t)|}{1} = 0{,}5|\sin(2t)|.$$

Hieruit leiden we het getallenpaar van punt *A* af: (cos(t), 0,5sin($2t$)). En daarmee herkennen we de parametervoorstelling uit het examen van 2015.

Vergelijken van lemniscaten Bernoulli en Gerono

Het is toch interessant om de examenlemniscaat (type Gerono) te vergelijken met een geschikt exemplaar van de familie Bernoulli: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Maar wat is geschikt? We kiezen voor een exemplaar waarvan het symmetriepunt ook samenvalt met de oorsprong en waarvan de breedte ook 2 is. Dat betekent dat punt (1, 0) op die Bernoulli-lemniscaat moet liggen. We vullen de coördinaten in de vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ in, zie *Euclides* 4, en vinden $2a^2 = 1$ en dus $a = ½\sqrt{2}$. Dat geeft de vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$. Zie de twee soorten lemniscaten in figuur 5. De blauwe lemniscaat geven we aan met BL (Bernouilli-lemniscaat) en de rode met GL (Gerono-lemniscaat). We vinden dat deze twee lemniscaten met breedte 2 passen in een rechthoek van 1 bij 2.

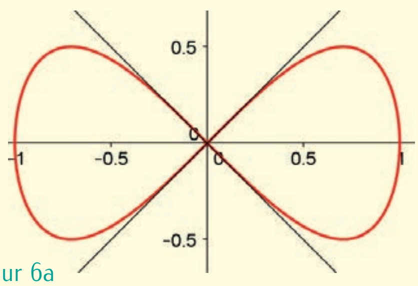
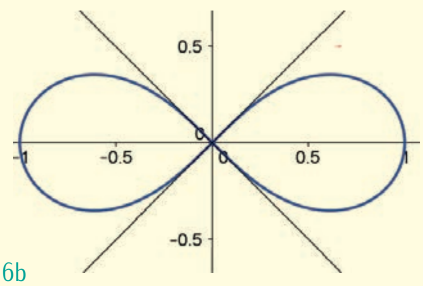
Raaklijnen in de oorsprong

We kijken bij de GL naar de hellingen van de raaklijnen in de oorsprong. Voor de oorsprong zijn er twee verschillende t-waarden.

$$\text{voor } t = 0{,}5\pi\text{:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(2t)}{-\sin(t)} = \frac{\cos(\pi)}{-\sin(0{,}5\pi)} = \frac{-1}{-1} = 1 \text{ en}$$

$$\text{voor } t = 1{,}5\pi\text{:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(2t)}{-\sin(t)} = \frac{\cos(3\pi)}{-\sin(1{,}5\pi)} = \frac{-1}{1} = -1$$

In tabel 1 ziet u ook de parametervoorstelling van de BL. Controleert u dit maar met de vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$.

	Gerono (examen)	Bernoulli
Cartesiaanse vergelijking	$y^2 = x^2(1 - x^2)$	$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$
Parametervoorstelling	$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) \end{cases}$ met $0 \le t \le 2\pi$	$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)} \\ y(t) = \dfrac{\sin(t)\cdot\cos(t)}{1+\sin^2(t)} \end{cases}$ met $0 \le t \le 2\pi$
Polaire vergelijking		afleiding volgt nog: $r^2 = \cos(2\varphi)$
Grafieken met raaklijnen in *O*. De raaklijnen hebben helling 1 of -1	 figuur 6a	 figuur 6b
Oppervlakte	?	?

tabel 1

U ziet dat de parametervoorstellingen overeenkomsten vertonen. Bij BL en GL kunnen we ook opmerken dat $y(t) = \sin(t) \cdot x(t)$. Hiermee kunnen we óók de hellingen uitrekenen in de oorsprong bij GL en BL. Immers voor beide lemniscaten geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos(t)\cdot x(t)+\sin(t)\cdot x'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos(t)\cdot x(t)}{x'(t)}+\sin(t)$$

Dat geeft bij invulling van $t = 0{,}5\pi$ en $t = 1{,}5\pi$ achtereenvolgens 1 en -1. $x'(t)$ moet wel voor die waarden ongelijk zijn aan nul. Gaat u maar na! De conclusie is dus dat beide lemniscaten dezelfde raaklijnen hebben in de oorsprong. In de tabel op pagina 15 ziet u de gegevens tot nu toe. Een voor de hand liggende vraag is: Wat is het oppervlakteverschil van de binnengebieden van de beide lemniscaten?

Oppervlakte Gerono-lemniscaat

$$\text{Opp(Gerono)} = 4\cdot\int_0^1 y\,dx = 4\cdot\int_0^1 \sin(t)\cos(t)\,d\cos(t) =$$

$$4\cdot\int_{0.5\pi}^{0} -\sin^2(t)\cdot\cos(t)\,dt = 4\cdot\int_0^{0.5\pi} \sin^2(t)\cdot\cos(t)\,dt =$$

$$4\cdot\left[\tfrac{1}{3}\cdot\sin^3(t)\right]_0^{0.5\pi} = \tfrac{4}{3}$$

Natuurlijk kan het ook met het gegeven van vraag 16 in het examen: $y^2 = x^2(1 - x^2)$.
Voor het eerste kwadrant geldt: $y = x\sqrt{1-x^2}$. Deze functie heeft als primitieve: $y = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$. De totale oppervlakte van de lemniscaat is $4\cdot\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$.

Oppervlakte Bernoulli-lemniscaat

De vergelijking luidt: $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$. Dat is niet zo leuk, we kunnen y niet in x uitdrukken. We kunnen wel gaan werken met poolcoördinaten: punt (x, y) vervangen we door (r, ϕ) waarbij r de voerstraal is en ϕ de hoek van de voerstraal met positieve deel van de X-as.
De vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$ drukken we uit in poolcoördinaten waarbij $(x, y) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$.
Dat geeft: $(r^2)^2 = r^2\cos^2(\phi) - r^2\sin^2(\phi)$ ofwel: $r^2 = \cos(2\varphi)$.
Voor de totale oppervlakte geldt nu (zie zo nodig het intermezzo):

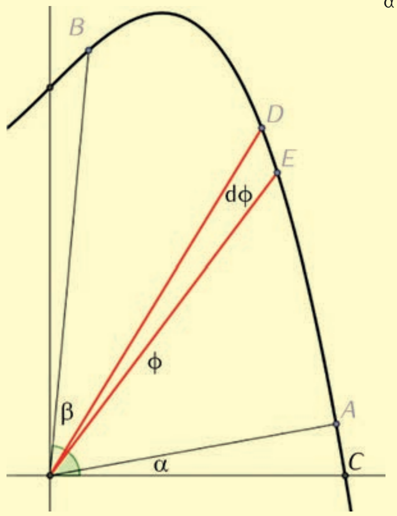
$$\text{Opp(Bernoulli)} = 4\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^{0{,}25\pi} r^2 d\phi = 2\cdot\int_0^{0{,}25\pi} \cos(2\phi)\,d\phi =$$

$$2\cdot[0{,}5\sin(2\phi)]_0^{0{,}25\pi} = 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1$$

Intermezzo
In een assenstelsel is een kromme afgebeeld met daarop de punten A, B, C, D en E. $\angle EOC = \phi$, $\angle AOC = \alpha$ en $\angle BOC = \beta$. Poolcoördinaten van punt E: (r, ϕ). Als $\Delta\phi$ heel klein wordt – we noteren $d\phi$ - en dus nul nadert, dan is de oppervlakte van vlakdeel DOE ongeveer gelijk aan

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi}\cdot\pi r^2 = \tfrac{1}{2}r^2\Delta\phi\ .\ \text{Opp(vlakdeel } BOA) = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\phi$$

Zie figuur 7



figuur 7

Het verschil tussen de oppervlakten van beide lemniscaten is $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.

U kunt verder de volgende beweringen controleren:
– Toppen C en D van LG hebben dezelfde x-coördinaat als F_2 van LB.
– x-coördinaten van de toppen boven en onder de X-as komen niet met elkaar overeen.

We kunnen ook de lengtes van beide lemniscaten, wederom met behulp van poolcoördinaten, met elkaar vergelijken. Een uitdaging? Misschien stuit u op integralen die niet exact te berekenen zijn.

Tot slot

Als u nog niet lemniscaatmoe bent: er zijn nog verschillende andere manieren om lemniscaten te construeren. En dat kan weer mooi met behulp van *GeoGebra*.

Bronnen

– Yates, R.C. (1952). *Curves and their properties. Classics in Mathematics Education* (herdruk 1974). Washington DC: National Council of Teachers of Mathematics.
– *http://imaginary.org/program/surfer*
– Martin Kindt, Figuren door formules, 2016, Nederlandse wiskundedagen 22, FI: Universiteit Utrecht.
– *http://www.mathcurve.com/courbes2d/gerono.shtml*
– Oud-docent Matthijs Wielders Open universiteit Heerlen
– Adams, R. A. (2013). *Calculus. A complete course.* Toronto: Pearson.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

HAAKJES WEGWERKEN IN EXPRESSIES MET LETTERS

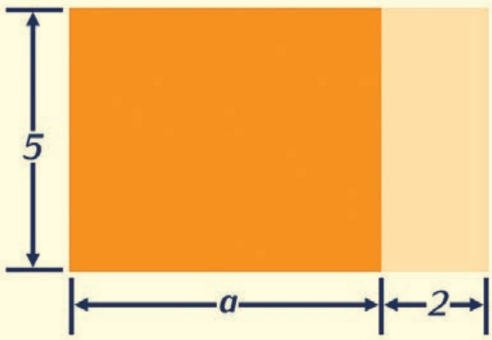
Lonneke Boels

Haakjes wegwerken in expressies met letters is een lastig onderwerp voor leerlingen. In de meeste methoden wordt dit in klas 1 van havo en vwo voor het eerst behandeld. Een deel van deze leerlingen zijn dan eigenlijk nog niet toe aan dit abstractieniveau, aldus recent hersenonderzoek en bijvoorbeeld de leerpsychologen Bruner en Piaget. In sommige methoden wordt hieraan tegemoetgekomen door voorafgaand aan het abstracte niveau van kale letteropgaven een schema of model aan te bieden. Een veelgebruikt model bij haakjes wegwerken is het oppervlaktemodel. De *Wageningse Methode* (*WM*) biedt dit model in de eerste klas aan in hoofdstuk 3, *Getal & Ruimte* in hoofdstuk 8 en *Mathplus* in hoofdstuk 11.

Het voordeel van dit soort modellen is dat het de regels voor het wegwerken van haakjes inzichtelijk maakt. De *Wageningse Methode* laat leerlingen deze methode zelf ontdekken (geleide herontdekking) terwijl *Getal & Ruimte* en *Mathplus* de methode direct geven: zo moet het. Uiteraard kent het oppervlaktemodel zijn beperkingen, bijvoorbeeld bij het gebruik van negatieve getallen.

Wie vastloopt in zijn uitleg of merkt dat leerlingen dit onderwerp niet goed onder de knie krijgen (of vergeten zijn) raad ik aan om een kijkje te nemen op de website van de *Wageningse Methode* of *Math4all*. Het digitale materiaal is gratis online beschikbaar en met name de aanpak van de *Wageningse Methode* leent zich goed voor een klassengesprek. Bijvoorbeeld het model uit figuur 1. Wat hierbij opvalt, is dat er eerst nog met een combinatie van letters en getallen wordt gewerkt voordat alle zijden letters krijgen. Zo blijft het model in eerste instantie nog dicht bij een voor leerlingen herkenbare oppervlakte.

Een rechthoek is verdeeld in een donker en een licht deel. De breedte van het donkere deel is niet bekend; die noemen we *a*. We gaan de oppervlakte van de rechthoek op twee manieren schrijven.



figuur 1 Oppervlaktemodel voor het wegwerken van haakjes (*WM*, hoofdstuk 3)

a Neem de onderstaande twee berekeningen over en vul ze in.

1^e^ manier: lengte · breedte

lengte rechthoek	....
breedte rechthoek	....
oppervlakte rechthoek	....

2^e^ manier: donkere deel + lichte deel

oppervlakte donkere deel	....
oppervlakte lichte deel	....
oppervlakte rechthoek	....

Je hebt nu de oppervlakte op twee manieren berkend. De twee uitkomsten zijn dus gelijk.

b Welke gelijkheid vind je nu?

Je kunt bovenstaande gelijkheid controleren door enkele getallen in te vullen.

c Controleer de gelijkheid voor $a = 7$ en voor $a = 100$.

figuur 2 Opgave bij de rechthoek van figuur 1 (*WM*, hoofdstuk 3)

Meer lezen: *http://www.wageningse-methode.nl/* en *https://www.math4all.nl/*

Lonneke Boels

PISA 2015

Ger Limpens
Ruud Stolwijk

In december 2016 werden de resultaten van PISA-2015 gepubliceerd. 'Nederland daalt op wereldranglijst onderwijs maar scoort op wiskunde' kopte de webeditie van *de Volkskrant*. Maar wat betekent dat precies? Ger Limpens en Ruud Stolwijk houden de PISA-resultaten tegen het licht.

Wat is PISA?

PISA is een acroniem dat staat voor Programme for International Student Assessment. Het is een onderzoek dat eens in de drie jaar wordt uitgevoerd in de landen die het samenwerkingsverband OESO, de Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling, vormen. Op dit moment zijn 35 landen lid van de OESO. Behalve deze OESO-landen nemen ook andere landen deel aan dit onderzoek. Deze andere landen heten in PISA-jargon 'partnerlanden'. Het aantal partnerlanden neemt in de loop der jaren overigens gestaag toe – tijdens de PISA-meting in 2015 waren het er 36.
Het onderzoek gaat over de kwaliteit van het onderwijs door toetsvragen aan vijftienjarigen voor te leggen op het gebied van leesvaardigheid, natuurwetenschappen en wiskunde. Men probeert met deze toetsen na te gaan hoe leerlingen uit de deelnemende landen scoren ten opzichte van elkaar binnen elk van deze disciplines. Daarnaast laat PISA zien hoe de leerlingresultaten van elk deelnemend land zich in de loop der jaren ontwikkelen.
Het PISA-onderzoek wordt sinds 2000 elke drie jaar uitgevoerd. Bij elke PISA-afname is afwisselend een van de drie leergebieden 'hoofdonderwerp'. In het startjaar 2000 was leesvaardigheid hoofdonderwerp, in 2003 was dat wiskunde en in 2006 natuurwetenschappen, waarna in 2009, 2012 en 2015 weer achtereenvolgens leesvaardigheid, wiskunde en natuurwetenschappen volgden. Wiskunde zal dus in 2021 weer hoofdonderwerp zijn.

Wie voert PISA uit?

Het PISA-onderzoek wordt in opdracht van de OESO uitgevoerd door een consortium dat bestaat uit organisaties uit verschillende landen. Dit consortium opereert op dit moment onder leiding van ETS, een toetsbedrijf uit de Verenigde Staten, en maakt, conform de richtlijnen van de Governing Board van PISA (de aansturende vertegenwoordigers vanuit de OESO) toetsen op de voornoemde leergebieden en tevens vragenlijsten die betrekking hebben op het onderwijsproces. In elk van de deelnemende landen wordt verder een organisatie of instituut (door de overheid van het betreffende land) aangewezen om de uitvoering van het onderzoek in dat land te coördineren. In 2015 (en ook in de eerdere afleveringen van PISA) was Cito die organisatie in Nederland. In 2018, het volgende PISA-jaar, zal dit de Universiteit van Twente zijn.

Hoe werkt PISA?

Volgens vastgestelde (en later ook door het consortium gecontroleerde) richtlijnen wordt door de coördinerende landelijke organisatie in elk land een aantal scholen benaderd waarvan vijftienjarige leerlingen uitgenodigd worden om deel te nemen aan dit onderzoek. Als in een land het aantal scholen of de afspiegeling van de diversiteit van scholen niet aan de minimumeisen van de richtlijnen voldoet, wordt het betreffende land niet in de rapportage meegenomen. Dat overkwam in 2015 bijvoorbeeld Kazachstan en Argentinië. In 2000 werd Nederland overigens evenmin in de ranglijsten opgenomen vanwege het niet voldoen aan die richtlijnen.
De deelnemende leerlingen krijgen toetsvragen over de drie leergebieden en een enquête voorgelegd. Die toetsvragen zijn door het consortium ontwikkeld en goedgekeurd door een groep van vakinhoudelijke deskundigen, afkomstig uit verschillende OESO-landen. Ook zijn deze opgaven voorgelegd aan vertegenwoordigers van alle OESO-landen om na te gaan of de opgaven geschikt zijn voor gebruik in elk van deze landen. Het streven is om de vragen zodanig samen te stellen dat er niet zozeer gebruikgemaakt wordt van specifieke kennis uit het curriculum dat per land verschillend is, maar van vaardigheden die in elk land nagestreefd worden. Zo zal in een PISA-toets voor wiskunde niet de vraag gesteld worden om de formule van een lineaire functie op te stellen als abstracte intra-mathematische entiteit, maar wel zal gevraagd kunnen worden een gegeven formule van een lineair verband binnen een bepaalde context te interpreteren.
Om de vergelijking door de jaren heen mogelijk te maken, wordt er bij elke PISA-afname gebruikgemaakt van zogeheten ankeropgaven. Die ankeropgaven worden bij elke afname ingezet om op die wijze inzicht te krijgen in het verloop van het niveau van de gemeten vaardigheid in de tijd. Dat is overigens ook meteen de reden waarom na afloop niet alle PISA-items openbaar gemaakt worden: als de ankeropgaven bekend zijn, laten ze weliswaar zien wat PISA pretendeert te meten, maar dan zijn ze voor de toekomst onbruikbaar om als meetlat te functioneren. Het gebruik van deze ankeropgaven en het gebruik van een (voor wiskunde in 2003) gezette standaard maakt het mogelijk om de vaardigheid van alle deelnemende landen in een leergebied door de jaren heen op een en

dezelfde schaal te brengen. Die schaal is in het eerste jaar dat wiskunde hoofdonderwerp was, vastgesteld door de gemiddelde gemeten vaardigheid van de OESO-landen in 2003 vast te zetten op een arbitrair getal, zijnde 500, en de schaalbreedte te definiëren in de toentertijd geconstateerde standaarddeviatie: de standaarddeviatie in 2003 van de OESO-landen is op deze schaal als 100 vastgesteld. De schalen van leesvaardigheid en van natuurwetenschappen zijn op eenzelfde manier in 2000 respectievelijk 2006 gedefinieerd. Op deze wijze is dus af te lezen hoe de landen zich ten opzichte van elkaar verhouden maar ook hoe een land zich ten opzichte van zichzelf ontwikkelt. Dit laatste in tegenstelling tot een ander internationaal onderzoek, TIMSS. Bij TIMSS is die internationale vergelijking wel mogelijk maar de vergelijking van een land met zichzelf in de loop van de tijd is daar niet aan de orde, omdat de ijking bij TIMSS per afnamejaar plaatsvindt (ook op een schaal met een gemiddelde van 500 en met een standaarddeviatie van 100 overigens).
Verder past in het bovenstaande wel een kanttekening te maken bij het recente PISA-onderzoek. Hoewel ook bij PISA-2015 weer gebruikgemaakt is van de bovenvermelde ankeropgaven, dient te worden opgemerkt dat de toetsen bij deze editie voor de eerste keer via de computer werden afgenomen. Dat betekent ook dat de omstandigheden waaronder leerlingen deze ankeritems maakten niet identiek waren aan eerdere jaren. Hoewel een studie, die eveneens onder auspiciën van de OESO heeft plaatsgevonden, erop lijkt te wijzen dat er als gevolg van de wisseling in aanbiedingswijze geen verschil in vaardigheid gemeten wordt, is deze wisseling in afnameomstandigheden niet onomstreden. Vervolgonderzoek lijkt dan ook absoluut nodig om vast te stellen of de vergelijkbaarheid van de PISA-metingen door de jaren heen overeind zal kunnen blijven.

Wat is het belang van PISA?

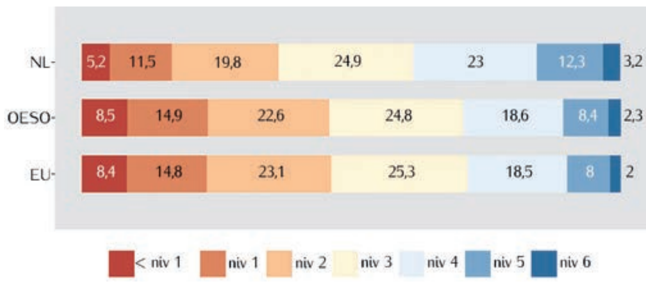
Het belang van PISA ligt in de dubbele meettechniek. Het is absoluut zinvol om je als land te vergelijken met andere landen en daar lessen uit te trekken. Zo is, als direct gevolg van het PISA-onderzoek, het wiskundeonderwijs in Duitsland sinds 2003 fors op de schop genomen: de Duitse onderwijsautoriteiten waren zeker niet blij met de relatief lage positie die Duitsland in 2003 op de internationale PISA-ranglijst innam. Na de confronterende uitslag van 2003 is er stevig nagedacht over de wijze waarop wiskunde onderwezen werd en dat heeft geleid tot een andere aanpak die nu, ruim tien jaar later, wel degelijk vruchten lijkt af te werpen. Ook de vergelijking van een land met zichzelf door de jaren heen kan uiterst vruchtbaar zijn. Op het moment dat de score van een land in de loop van de jaren verandert, kun je onderzoeken wat de oorzaak van die verandering is geweest en vervolgens of je tevreden bent met die verandering. Daarmee is niet gezegd dat een dalende score per definitie zou moeten leiden tot een beleidsverandering: een dalende score die veroorzaakt wordt door een bewust ingezet veranderd onderwijsbeleid kan heel goed verdedigd worden door dat andere onderwijsbeleid principieel te verdedigen. Maar die meetlat geeft een land wel de gelegenheid om deze meting uit te voeren: zonder meetlat zou een verandering veel lastiger zijn vast te stellen.

Hoe scoort Nederland in PISA?

Zowel in het nationale PISA-2015-rapport[1], als in de samenvatting daarvan *Resultaten PISA-2015 in vogelvlucht* [2] gesteld wordt, kan men de belangrijkste conclusies van PISA-2015 als goed nieuws en als slecht nieuws presenteren. In het internationale gezelschap is Nederland nog steeds een goede (sub)topper. De samenvatting van het rapport citerend: ‘Binnen Europa staan we voor natuurwetenschappen zesde (na Estland, Finland, Slovenië, Verenigd Koninkrijk en Duitsland), voor leesvaardigheid zevende (na Finland, Ierland, Estland, Duitsland, Polen en Slovenië) en voor wiskunde zelfs tweede (na Estland).’ ‘Het slechte nieuws is dat het gemiddelde niveau van natuurwetenschappen, leesvaardigheid en wiskunde in de OESO-landen gedaald is en dat het niveau in Nederland nog iets sterker lijkt te dalen dan elders.’

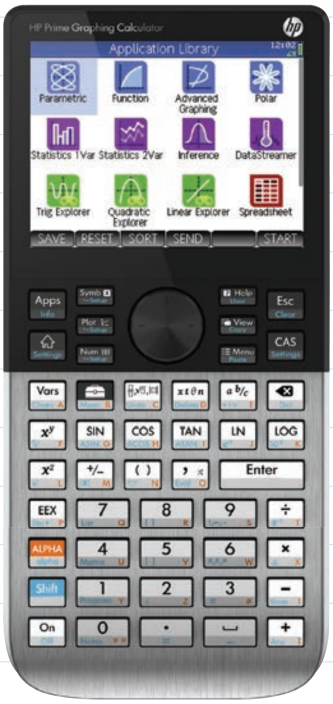
‘NEDERLAND TELT RELATIEF WEINIG LEERLINGEN “AAN DE ONDERKANT” EN RELATIEF VEEL “AAN DE BOVENKANT”.’

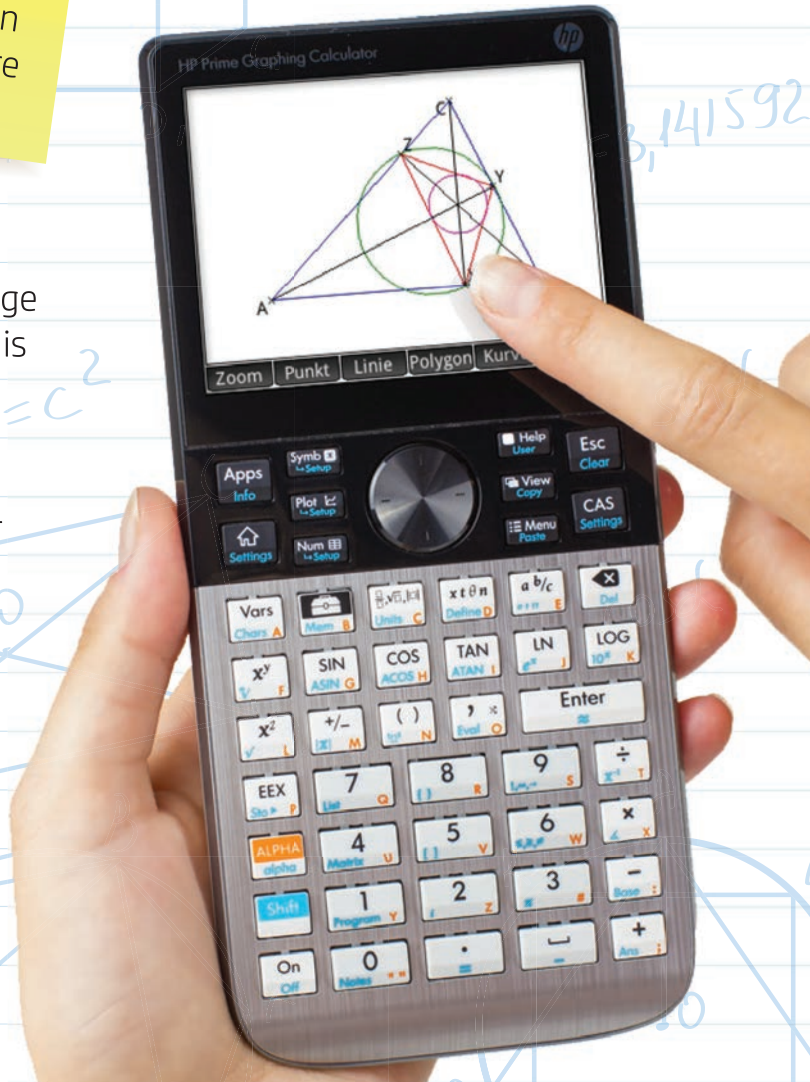
In dit artikel beperken we ons tot wiskunde. Of beter, om in PISA-termen te blijven, wiskundige geletterdheid. Want daar gaat het bij PISA om. In het PISA 2015 Mathematics Framework[3] wordt dat begrip gedefinieerd als het vermogen van een individu om wiskunde te formuleren, te gebruiken en te interpreteren in een reeks van



figuur 1 Verdeling vaardigheidsniveaus naar land voor wiskundige geletterdheid

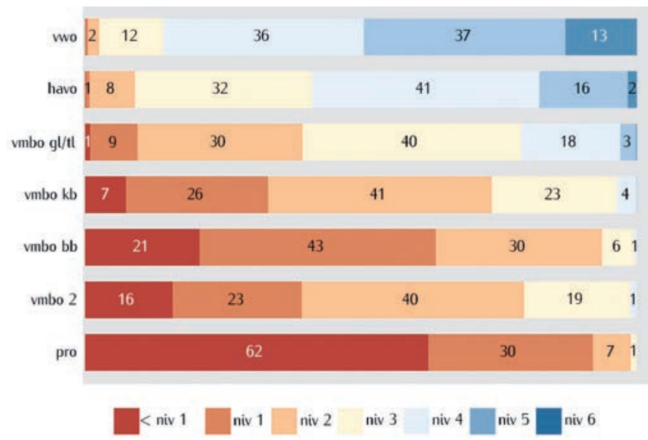
contexten. In het nationale PISA-2015-verslag worden zes vaardigheidsniveaus voor wiskundige geletterdheid onderscheiden. Deze niveaus zijn op basis van het PISA-2003-onderzoek geformuleerd en ook gekoppeld aan de in 2003


HP Prime Graphing Calculator
Application Library
SAVE
RESET
SORT
SEND
START


HP Prime Graphing Calculator
Zoom
Punkt
Linie
Polygon

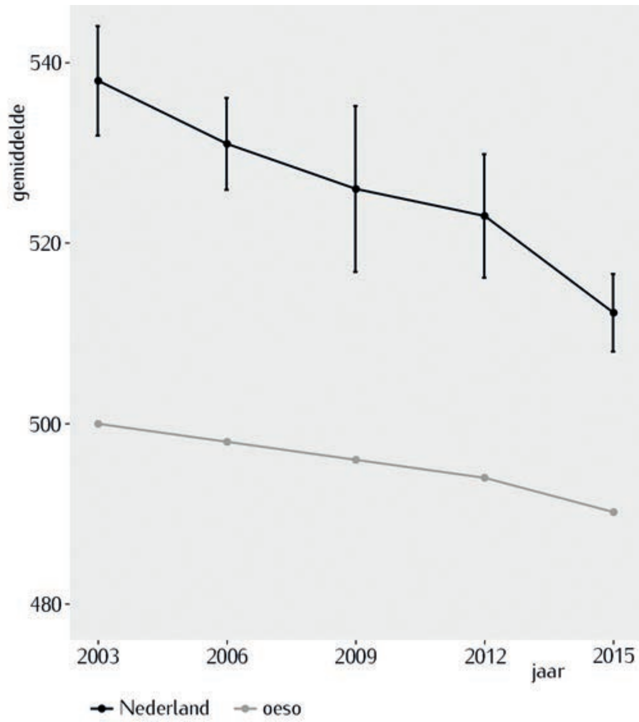
gedefinieerde PISA-schaal voor wiskunde. In figuur 1 zien we deze zes niveaus voor Nederland, de OESO als geheel en de EU weergegeven in percentages.
Hier is te zien dat Nederland er nog steeds in slaagt om relatief veel leerlingen op een redelijk basisniveau te krijgen, ervan uitgaand dat niveau 4 (zie het nationale PISA-2012-verslag)[4] een vaardigheidsniveau is dat een mondige en betrokken burger zou moeten hebben. Verder is te zien dat Nederland in vergelijking met de diverse buitenlanden relatief weinig leerlingen 'aan de onderkant' (niveau 1 en daaronder) telt, en relatief veel 'aan de bovenkant' (niveau 5 en 6).

In figuur 2 is die verdeling van de vaardigheidsniveaus weergegeven binnen de verschillende opleidingstypes.



figuur 2 Verdeling van de vaardigheidsniveaus naar opleidingstype

Figuur 2 is in wezen een bevestiging van het selectievermogen van het Nederlands onderwijsbestel. Het is goed te zien dat we met ons gelaagde onderwijssysteem de leerlingen zo weten te ordenen dat dat grotendeels in lijn is met de bij PISA gemeten wiskundige vaardigheid. Overigens is het misschien wel alarmerend dat in 2015 de overgrote meerderheid van leerlingen binnen het vmbo en het praktijkonderwijs (pro) niet aan vaardigheidsniveau 4 voldoet.
In figuur 3 is echter iets te zien dat zonder twijfel reden tot nadenken geeft. Hier is het slechte nieuws, hierboven geciteerd uit de samenvatting van het rapport, in beeld gebracht. De vaardigheid van de Nederlandse leerling is in de loop der jaren gestaag gedaald. Dat dat ook voor de OESO-leerling geldt, is zeker waar, maar dat maakt de eerste constatering nog niet minder alarmerend. Naar redenen voor deze daling zal nader onderzoek gedaan



figuur 3 Ontwikkeling van de wiskundige vaardigheid sinds 2003

moeten worden om er met enige vorm van zekerheid iets over te kunnen zeggen. Wat hierbij de rol is van de toegenomen aandacht voor algebraïsche vaardigheden (die in ieder geval in de onderbouw van havo en vwo de afgelopen jaren aan de orde is) kan daarbij wellicht een interessant aspect zijn.

Wat vinden we van de Nederlandse PISA-score?

Zoals eerder betoogd, is het van belang de vaardigheid van leerlingen in een specifiek land in kaart te brengen door ze zowel te vergelijken met leerlingen in andere landen als met Nederlandse leerlingen in voorgaande jaren. Als je als beleidsbepalers nadenkt over de toekomstperspectieven van je land, dan is het wijs dat je weet waar het Nederlandse onderwijs staat en welke kant het op gaat. Dat is per slot van rekening precies de reden dat we meedoen aan een internationaal onderzoek als PISA (en aan andere internationale onderzoeken naar de kwaliteit van het onderwijs). Als je van mening bent dat een dergelijk onderzoek niet die zaken meet die je relevant vindt (en dergelijke berichten waren er onlangs wel hier en daar in de pers te lezen) dan zou je de discussie moeten voeren of je nog wel mee moet doen aan dergelijke onderzoeken. Dat geld kun je dan beter in je zak houden. Maar een dergelijk standpunt getuigt, als het gaat om PISA en de

> 'DE VAARDIGHEID VAN DE NEDERLANDSE LEERLING IS IN DE LOOP DER JAREN GESTAAG GEDAALD.'

wiskundige geletterdheid, van heel weinig kennis van zaken: juist die wiskundige geletterdheid is iets wat ons in Nederland na aan het hart moet gaan. Het is een opvatting over wiskunde die heel dicht in de buurt komt van hetgeen we in Nederland al vele jaren lang op heel veel plekken proberen vorm te geven: realistisch wiskundeonderwijs of wiskunde-in-context als wezenlijk onderdeel van het wiskundeonderwijs.

Zijn er verklaringen voor die score?

Ongetwijfeld zijn die er. Maar PISA is slechts een rapportage, een medium waarmee metingen verricht kunnen worden. PISA is niet het instrument waarmee ontwikkelingen verklaard kunnen worden. Daarvoor is secundair onderzoek absoluut noodzakelijk. Overigens treft men in het PISA-2015-verslag wel suggesties voor verklaringen aan, maar die kunnen niet als de ultieme verklaringen worden gezien.

Hoe verder, na PISA-2015?

Het PISA-2015-rapport werd op 6 december 2016 door Sander Dekker, staatssecretaris voor Onderwijs, Cultuur en Wetenschap aan de Tweede Kamer aangeboden. In de bijbehorende aanbiedingsbrief [5] meldde Dekker ook meteen dat hij naar aanleiding van dit rapport een leerplankundige analyse gevraagd heeft van, onder andere, wiskunde. Daarbij wordt dan, aldus Dekker, 'gekeken naar het onderwijsaanbod en de mate waarin dat aansluit bij wat PISA vraagt'. Een en ander met de bedoeling om zowel de PISA-resultaten beter te kunnen duiden, als uit te sluiten dat recente aanpassingen in ons curriculum mogelijk oorzaak zijn van de dalende prestaties. Daar passen wel enkele kanttekeningen bij, want hoe relevant is een leerplankundige analyse als je weet dat PISA niet-curriculum gebaseerd is? Zou het niet zinvoller zijn om te zien of er uit de PISA-resultaten wat meer in detail en in concreto geconcludeerd kan worden op welke vaardigheden Nederlandse leerlingen in de loop van de laatste vijftien jaar achteruit zijn gegaan? Dat hier nader onderzoek voor nodig en gewenst is, moge (in ieder geval volgens de auteurs, en hopelijk ook de lezers van dit artikel) inmiddels wel duidelijk zijn.

Noten

[1] *PISA-2015-rapport*
Zie *http://www.cito.nl/onderzoek%20en%20wetenschap/deelname_int_onderzoek/pisa/resultaten*

[2] 'Resultaten PISA-2015 in vogelvlucht'
http://www.cito.nl/onderzoek%20en%20wetenschap/deelname_int_onderzoek/pisa/resultaten

[3] *PISA 2015 Mathematics Framework*
http://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2015-assessment-and-analytical-framework/pisa-2015-mathematics-framework_9789264255425-5-en

[4] *PISA-2012-verslag*
http://www.cito.nl/onderzoek%20en%20wetenschap/deelname_int_onderzoek/pisa/resultaten

[5] Aanbiedingsbrief 'Resultaten PISA-2015 in vogelvlucht'
https://www.rijksoverheid.nl/documenten/rapporten/2016/12/06/resultaten-pisa-2015-in-vogelvlucht

Over de auteurs

Ger Limpens en Ruud Stolwijk zijn beiden toetsdeskundige bij Cito en als zodanig betrokken bij de afname en rapportage rond PISA-2015 in Nederland.
E-mailadressen: *ger.limpens@cito.nl* en *ruud.stolwijk@cito.nl*

ANALYTISCHE MEETKUNDE VOOR 4 HAVO / VWO

Ton Lecluse

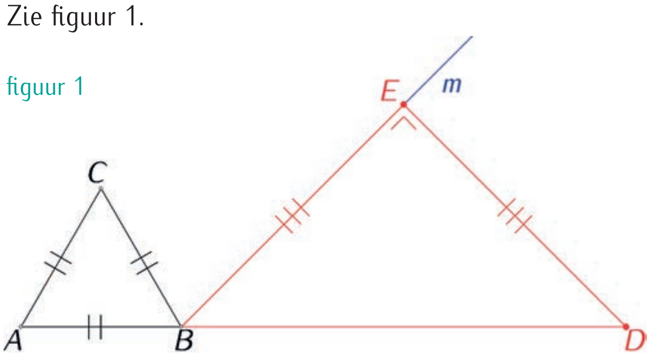
Ton Lecluse mag dan wel gestopt zijn met zijn rubriek Vanuit de oude doos, het schrijven over meetkunde kan hij gelukkig niet laten. Dit artikel is een bijdrage in de vorm van een examenopgave over analytische meetkunde, inclusief normering en correctievoorschrift.

Het nieuwe examenprogramma wiskunde B op havo en vwo omvat analytische meetkunde. Terug van weggeweest, en we mogen als docent weer op zoek naar uitdagende en mooie (toets)opgaven hierbij. Vaak zie je kleine, mooie opgaven waarin relatief weinig wordt getoetst. In de vierde klassen bijvoorbeeld alleen gelijkvormigheid, sinus- of cosinusregel, Descartes (iets *x* stellen of assenstelsel invoeren) of de verhoudingen bij de 30° - 60° - 90° of 45° - 45° - 90° driehoek. Het zou mooi zijn eens een context te hebben die een breder repertoire vereist. Zo kwam ik op het volgende idee. Het is een speciale opgave waarin (onverwacht) alles exact kan worden berekend (ondanks sinus- en cosinusregel)! Eén punt in de tekening varieert, en telkens is de vraag hetzelfde, maar de uitwerking niet. Charmant!

Titel van de opgave: 30° - 60° - 90° + 45° - 45° - 90°
Doelgroep: 4 vwo (of hoger) wiskunde B

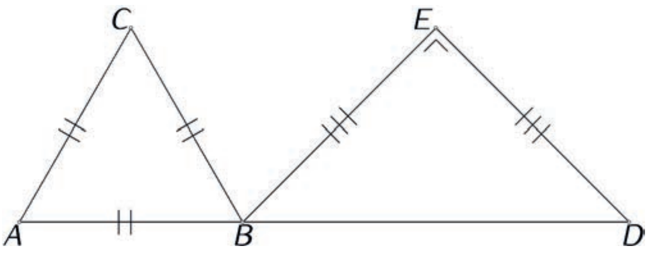
Leg een gelijkzijdige driehoek *ABC* en een rechthoekige, gelijkbenige driehoek *BDE* (met $\angle E = 90°$), tegen elkaar aan zó dat *D* in het verlengde van *AB* ligt. We gaan onderzoeken hoe lang *BE* en *CE* zijn in speciale situaties. Zie figuur 1.

figuur 1



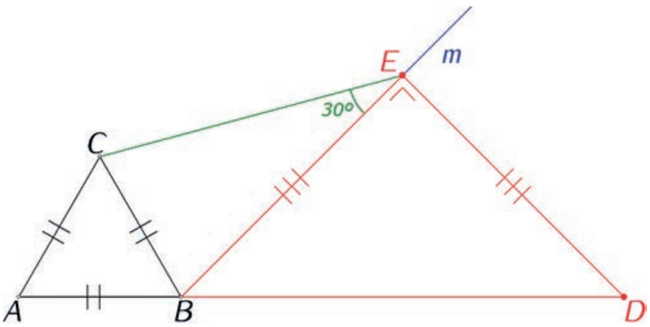
In de tekening is een halve hulplijn *m* door *B* getekend, die met lijnstuk *AB* een hoek van 135° maakt. Punt *E* is een verschuifbaar punt op *m*. Hiermee kunnen we de grootte van de (rode) driehoek *BDE* variëren.
In het vervolg stellen we $AB = 2a$. Verder mag er nergens worden benaderd, alle berekeningen moeten exact blijven!

Opgave 1
We kiezen *E* zó dat de driehoeken even hoog zijn (dus *CE* // *AD*). Zie figuur 2.
4p Druk *BE* en *CE* (exact) uit in *a*.



figuur 2

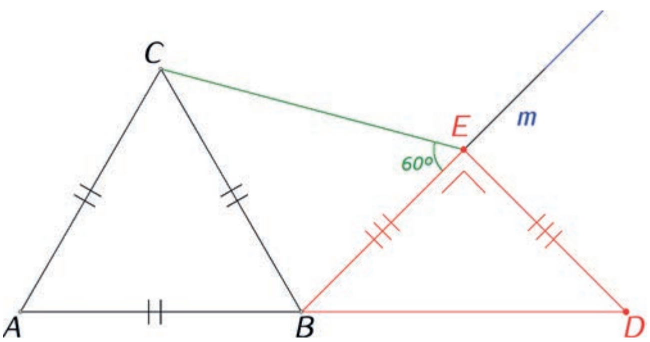
Opgave 2
We kiezen *E* zó dat $\angle CEB = 30°$ Zie figuur 3.



figuur 3

7p Druk *BE* en *CE* (exact) uit in *a*.

Opgave 3
We kiezen *E* zó dat $\angle CEB = 60°$ Zie figuur 4.



figuur 4

6p Druk *BE* en *CE* (exact) uit in *a*.

Correctievoorschrift

Opgave 1 **4 pt**

1p de hoogte van de driehoeken ($= d(C, AB)) = a\sqrt{3}$

1p $BE = a\sqrt{3} \times \sqrt{2} = a\sqrt{6}$

2p $CE = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BD = a + a\sqrt{3}$ $(= a(1 + \sqrt{3})$

Opgave 2 **7 pt**

1p $\angle CBE = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

1p $\angle BCE = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$

1p dus is driehoek CBE gelijkbenig; stel $BC = CE = x$ en pas de cosinusregel toe:

1p $(2a)^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos(30^\circ)$

1p $(\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dus) $4a^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

1p $4a^2 = x^2(2 - \sqrt{3})$

1p $BE = CE = x = \dfrac{2a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \left(= 2a\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

Opmerking 1: bij het toepassen van de sinusregel stuit je op sin(75°), waarvan de exacte waarde niet voor de hand ligt. Wel kun je na bovenstaande uitwerking deze waarde bepalen met de sinusregel achteraf.

Opmerking 2: aangezien de driehoeken BCA en BCE gelijkbenig zijn met gelijke basis, is vierhoek $ABEC$ een vlieger en kan de opgave ook geprobeerd worden door de symmetrieas/diagonaal AE te trekken. Ook nu loop je vast bij hoeken van 15° en 75°.

Opgave 3 **6 pt**

1p in driehoek BEC is $\angle C = 45^\circ$.

1p sinusregel in deze driehoek:

$$\frac{BC}{\sin(60^\circ)} = \frac{BE}{\sin(45^\circ)} \text{ dus : } \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{BE}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

1p dus $BE = \frac{2}{3}a\sqrt{6}$

1p cosinusregel in deze driehoek: (met $CE = x$):

$$4a^2 = \frac{8}{3}a^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{6} \cdot x \cdot \cos(60^\circ)$$

1p herleiden tot $x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}a \cdot x - \frac{2}{3}a^2 = 0$

1p met als positieve oplossing $x = a\left(\frac{1}{3}\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

BERICHTEN UIT HET VMBO

Ruud Jongeling

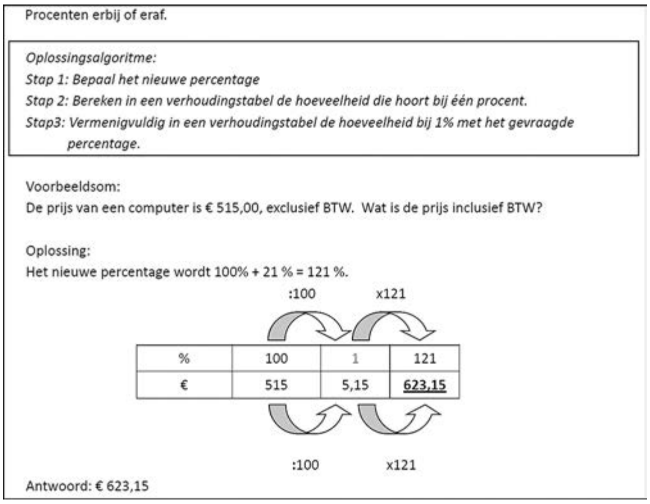
AFSPRAKENBOEK VOOR DE VAKGROEP WISKUNDE

Om aansluitingsproblemen tussen de verschillende leerjaren aan te pakken heeft de vakgroep wiskunde van het Da Vinci College een aantal vakinhoudelijke afspraken op papier gezet. Ruud Jongeling beschrijft in dit artikel het ontstaan en de inhoud van dit afsprakenboek.

Het Da Vinci College is een school voor praktijkonderwijs en vmbo. Het vmbo heeft drie vakcolleges die opleiden voor zowel de basisberoepsgerichte- als de kaderberoepsgerichte leerweg. Ongeveer een derde van de leerlingen heeft een indicatie voor leerwegondersteuning. De achterstanden waarmee de leerlingen binnenkomen zijn fors.
Bij de start van het eerste leerjaar nemen wij de Cito-vo toets 0 af. Uit deze toets blijkt dat voor rekenen de gemiddelde score van de basisleerlingen tot de onderste kwart van de basisberoepsgerichte leerlingen in Nederland behoort. De kaderleerlingen doen het iets beter. In beide leerwegen laten de leerlingen ook forse achterstanden zien op het gebied van Nederlandse woordenschat en begrijpend lezen.

Wat was het probleem?

Wiskundeonderwijs geven aan deze leerlingen is een uitdaging. 'Op dit niveau kan ik alles geven,' hoorde ik eens een collega zeggen en zo denken nog steeds veel directies en beleidsmakers. Naar mijn mening onderschatten ze de problematiek. Het is niet het wiskundeniveau dat voor de docent de moeilijkheid vormt.
Met Pythagoras, de sinus en het exponentiële verband hebben we in de kaderberoepsgerichte leerweg de top wel bereikt. De echte uitdaging is de leerlingen laten begrijpen wat ze doen en waarom ze het zo doen. Dat vereist van de docent oprechte belangstelling in zowel het vak als in de leerlingen. Het gaat om belangstelling voor en een onderzoekende houding naar de dieperliggende redenen waarom leerlingen een ogenschijnlijk simpel wiskundig vraagstuk niet kunnen oplossen of waarom ze een stukje uitleg maar niet oppikken. In de praktijk betekent dit nagaan welke uitleg het beste aansluit bij de leerlingen en het meeste begrip bij hen oplevert. Voor een deel is dit maatwerk per leerling maar over een aantal zaken kun je als wiskundedocenten ook afspraken maken met elkaar.
Een voorbeeld hiervan is het rekenen met percentages. In de wiskundemethode die wij gebruiken wordt al snel de factor ingevoerd als middel om met percentages te rekenen. Onze ervaring is dat voor veel leerlingen de relatie tussen het decimale getal en het percentage niet vanzelfsprekend is en vaak niet goed wordt begrepen. Het werken met de factor wordt dan een trucje dat niet echt wordt doorzien. Binnen de vakgroep hebben we dit probleem besproken en er uiteindelijk voor gekozen om bij percentages te rekenen met een verhoudingstabel. We denken dat het werken met de verhoudingstabel meer inzicht geeft dan het werken met de factor.



Procenten erbij of eraf.

Oplossingsalgoritme:
Stap 1: Bepaal het nieuwe percentage
Stap 2: Bereken in een verhoudingstabel de hoeveelheid die hoort bij één procent.
Stap3: Vermenigvuldig in een verhoudingstabel de hoeveelheid bij 1% met het gevraagde percentage.

Voorbeeldsom:
De prijs van een computer is € 515,00, exclusief BTW. Wat is de prijs inclusief BTW?

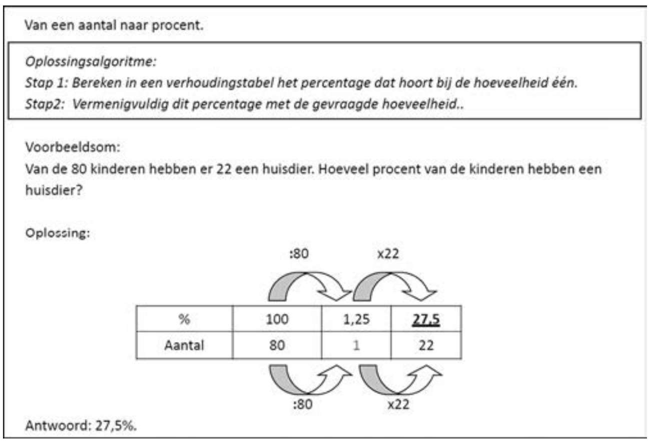
Oplossing:
Het nieuwe percentage wordt 100% + 21 % = 121 %.

%	100	1	121
€	515	5,15	623,15

:100 x121

Antwoord: € 623,15

figuur 1 Rekenen met procenten uit het afsprakenboek



Van een aantal naar procent.

Oplossingsalgoritme:
Stap 1: Bereken in een verhoudingstabel het percentage dat hoort bij de hoeveelheid één.
Stap2: Vermenigvuldig dit percentage met de gevraagde hoeveelheid..

Voorbeeldsom:
Van de 80 kinderen hebben er 22 een huisdier. Hoeveel procent van de kinderen hebben een huisdier?

Oplossing:

%	100	1,25	27,5
Aantal	80	1	22

:80 x22

Antwoord: 27,5%.

figuur 2 Rekenen met procenten uit het afsprakenboek

De ervaring leert dat leerlingen in de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg over het algemeen gebaat zijn met één aanpak. Rekenen met procenten via de factor bij de ene docent en via de verhoudingstabel bij een andere docent werkt verwarrend. Wanneer we met elkaar afspreken dat we gaan werken met de verhoudingstabel, dan moeten alle docenten die wiskunde geven zich daaraan houden. Niet alleen in het lopende schooljaar maar ook in de schooljaren daarna. Wiskunde werd en wordt met regelmaat gegeven door docenten die (nog) geen wiskundedocent zijn en soms meerdere vakken geven. We besloten daarom de vakinhoudelijke afspraken die we in de vakgroep maakten vast te leggen in een afsprakenboek.

Afsprakenboek

Het afsprakenboek begon simpel met afspraken over hoe we een aantal wiskundeonderwerpen aanbieden. Zo stonden er afspraken in over de stelling van Pythagoras, goniometrie, rekenen met procenten, meten en tekenen van hoeken en het oplossen van vergelijkingen met behulp van de balans. Al snel werden deze onderwerpen aangevuld met rekenen met schaal, werken met formules, inklemmen en het metriek stelsel. Het bleef echter niet bij deze inhoudelijke onderwerpen. Er bleek ook behoefte te zijn aan leerstofplanningen voor alle vier leerjaren. Stagnatie in de voortgang van de lesstof tijdens het schooljaar wordt daardoor beter zichtbaar en zo nodig besproken in de vakgroepvergaderingen.
Binnen het Da Vinci College zitten de leerlingen van beide leerwegen bij elkaar in een klas. Van de docent wordt dus verwacht dat hij les geeft op twee niveaus. Daarnaast is schoolbreed gekozen voor het directe instructiemodel. Beide uitgangspunten zijn door de vakgroep vastgelegd in afspraken met betrekking tot didactiek.

Concreet betekent dit voor de wiskundelessen:

- **Lesvoorbereiding uitgaand van het directe instructie model en zonodig uitgewerkt op 2 niveaus.**
- **Start van de les**
- **Instructie en begeleid inoefenen voor de basisberoepsgerichte leerlingen**
- **Instructie en begeleid inoefenen voor de kaderberoepsgerichte leerlingen**
- **Zelfstandig toepassen van het geleerde en verlengde instructie waar nodig.**
- **Afronding van de les**

In schema:

	basisberoeps	kaderberoeps
10 minuten	instructie	nakijken
10 minuten	nakijken	instructie
20 minuten	zelfstandig werken / verlengde instructie	
5 minuten	afronding van de les	

figuur 3 Afspraken rondom didactiek uit het afsprakenboek

De afspraken zijn bindend voor de docenten die wiskunde geven maar laten ook ruimte voor eigen invulling. De tijden zijn richtlijnen en daar waar de lesstof voor beide onderwijsniveaus parallel loopt, volstaan we met één instructie. Het afsprakenboek geeft kaders aan waarbinnen nog volop ruimte is voor eigen inbreng van de docent. De wiskundelessen bij de verschillende collega's van onze school zien er dan ook allemaal verschillend uit. Wat je wel herkent is de opbouw van de les en de oplossingsalgoritmen die overeenstemmen.

Hoe functioneert het afsprakenboek?

Het afsprakenboek is langzaam gegroeid tot wat het nu is. Het is niet statisch, ieder schooljaar worden er veranderingen in het afsprakenboek aangebracht. Met nieuwe collega's die wiskunde gaan geven, wordt het afsprakenboek bij de start doorgenomen. Dat geldt niet alleen voor collega's die van buiten komen maar ook voor collega's van het Da Vinci College zelf, die wiskunde naast een ander vak gaan geven. De afspraken in het afsprakenboek zijn niet vrijblijvend. Van de docenten die wiskunde geven, wordt verwacht dat ze zich aan de afspraken houden en indien nodig wordt de docent door de vakgroepleider of collega daarop aangesproken. Het afsprakenboek heeft gezorgd voor meer afstemming binnen ons wiskundeonderwijs. Het zorgt voor een doorgaande leerlijn met betrekking tot oplossingsalgoritmen en voor een herkenbare opbouw van de wiskundeles.

Een voorbeeld van het afsprakenboek in PDF-format is te downloaden vanaf de site van de NVvW.

vakbladeuclides.nl/925jongeling

Over de auteur

Ruud Jongeling is wiskundeleraar op het Da Vinci College in Roosendaal, een school voor de beroepsgerichte leerwegen in het vmbo en het praktijkonderwijs. Daarnaast is hij voorzitter van de werkgroep vmbo van de NVvW. E-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Marslander neergestort

U hebt het vorig najaar zeker meegekregen: het neerstorten van de Europese Marslander Schiaparelli. Oorzaak: een rekenfout. De computer aan boord kreeg foute metingen door. Het systeem kwam daardoor tot de conclusie dat de lander onder het oppervlak van de planeet zat. Een 'negatieve hoogteschatting' noemde de organisatie dit. In werkelijkheid bevond de lander zich in volle vlucht op bijna vier kilometer hoogte. Door de foute meting gooide de lander zijn parachute weg en gingen de remmotoren even aan. Te vroeg, zonder de remming sloeg de Schiaparelli van kilometers hoogte te pletter en ontplofte.
Bron: http://www.nu.nl/wetenschap/4355439/europese-marslander-schiaparelli-neergestort-rekenfout.html

Archief Christiaan Huygens online

Wetenschappelijk uitgever Brill werkt aan een digitalisering van het persoonlijk archief van Christiaan Huygens. Hiervoor werkt de uitgever samen met de Universiteit van Leiden, die het archief beheert. De notities van een van de grootste Nederlandse wiskundigen uit het verleden (onder andere bekend van het slingeruurwerk, de ontdekking van de ringen van Saturnus en zijn werk op het gebied van mechanica, optica en kansrekening (zie ook zebraboekje 17)) worden online ter beschikking gesteld aan studenten en wetenschappers.
Bron: http://www.nu.nl/wetenschap/4356239/wetenschappelijk-uitgever-brill-zet-archief-christiaan-huygens-online.html?redirect=1

Jong Talent Aanmoedigingsprijs Wiskunde

Had u de vorige jaren Maike Meier, Bob Zwetsloot, Guillermo Wildschut, Mike Daas, Maike de Jongh, Pepijn de Maat, Willem Gispen en/of Rutger Biezemans in de klas? Dan heeft u een talentvolle student wiskunde/technische wiskunde afgeleverd aan de universiteit. Deze acht studenten kregen op 28 november jl. een aanmoedigingsprijs van vijfhonderd euro voor hun studieresultaten in het eerste studiejaar. Zij behaalden de beste studieresultaten in de wiskunde: het gemiddelde cijfer van deze acht studenten was een 9,4. De prijzen werden ter beschikking gesteld door ORTEC om de studie in de wiskunde te stimuleren.
Bron: https://wiskundepersdienst.nl/nieuwsberichten/1050

Frank den Hollander koninklijk onderscheiden

Foto: Rien Meulman

De Leidse hoogleraar in de kansrekening, Frank den Hollander, is op 15 december jl. onderscheiden als Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Hij kreeg de onderscheiding in Eindhoven tijdens een speciale bijeenkomst ter gelegenheid van zijn zestigste verjaardag. Den Hollander is een internationaal vermaard wetenschapper. Hij heeft in het bijzonder bijgedragen aan de ontwikkeling en het onderzoek van modellen voor deeltjessystemen (statistische fysica), evolutie (genetica) en netwerken. Tijdens zijn gehele carrière heeft Den Hollander zich ingezet voor het bevorderen van de wiskunde, zowel nationaal als internationaal.
Bron: https://www.universiteitleiden.nl/nieuws/2016/12/frank-den-hollander-koninklijk-onderscheiden

BOEKBESPREKING

LIEFDE & WISKUNDE

Ger Limpens

Ondertitel: Het hart van de verborgen werkelijkheid
Auteur: Edward Frenkel
Uitgever: Novecento, Amsterdam (2015)
ISBN: 978-94-91126-04-8 363 pagina's (softcover)
Prijs: € 24,50

Benaderd worden om een boek met zo'n titel te recenseren is bijzonder. Zeker als je weet dat het ook echt over wiskunde gaat: iets dat je al snel ziet als je door het boek bladert. Gaat het dan ook echt over liefde?, zo vraag je je meteen af. Nou, om maar met de deur in huis te vallen, wat mij betreft niet. Ik vond de titel dan ook behoorlijk misleidend. Waarmee niet gezegd is dat het boek als zodanig ook tegenviel...

Verwachtingen

Op de achterflap van het boek lezen we dat Nobelprijswinnaar en natuurkundige David Gross dit boek zeer aanbeveelt aan iedereen die nieuwsgierig is en van schoonheid houdt. En Nassim Nicholas Taleb, schrijver van *The Black Swan*, meldt op diezelfde plek dat 'als je geen wiskundige bent, dit boek er wel voor zorgt dat je er een wilt worden.' Dergelijke teksten, in combinatie met die misleidende titel, zorgden er in ieder geval voor dat het leesclubje waar ik al vele jaren deel van uitmaak door mij in eerste instantie het verzoek voorgelegd kreeg het betreffende boek als gezamenlijke leesactiviteit op onze clubagenda te zetten. Nadat ik het boek zelf had gelezen, was ik blij dat mijn leesclubgenoten, geen van allen lezers met een uitgebreide wiskundige achtergrond, mijn verzoek hadden weggestemd en zekerheidshalve met een ruime meerderheid kozen voor een boek met een minder angstaanjagende titel (dat was, terzijde, *Het tumult van de tijd* van Julian Barnes). Ook die flapteksten deden dus geen recht aan *Liefde & Wiskunde*. En zelfs in het voorwoord, van de hand van Edward Frenkel zelf, treffen we zinnen aan die een ander boek suggereren dan het door mij gelezen werk. Bijvoorbeeld: 'Ik heb het geschreven voor lezers die niet over enige achtergrondkennis van wiskunde beschikken. Als u denkt dat wiskunde moeilijk is, dat u het niet snapt, als u bang bent voor wiskunde, maar tegelijkertijd toch nieuwsgierig bent of er misschien iets in zit dat voor u de moeite waard is om er kennis van te nemen - dan is dit een boek voor u.' Onzin dus in mijn optiek. Veelbelovend maar na lezing onzin. Dit boek is nagenoeg onleesbaar zonder een redelijk wiskundige achtergrond. Maar laat ik er meteen aan toevoegen dat je, als je dit boek aanschaft als wiskundig onderlegde lezer, wel een heel fraai werk hebt gekocht waarbij ik trouwens ook een compliment aan vertaler Hans van den Berg zou willen uitspreken: zonder het Engelstalige origineel ernaast gelegd te hebben, denk ik te kunnen constateren dat Van den Berg een vertaling heeft opgeleverd die recht doet aan de wiskunde en tevens heel vloeiend en prettig leest.

Fascinerende wiskunde

Edward Frenkel is een wiskundige die afkomstig is uit de voormalige Sovjet-Unie. Zodra zich, tegen het einde van de jaren '80 van de vorige eeuw, de gelegenheid voordeed om naar de VS te vertrekken, heeft hij dat gedaan. In het boek maakt hij duidelijk dat daar ook alle reden voor was. Het is schrijnend om te lezen hoe hij, als jongen met een joodse achtergrond, niet in staat werd gesteld om zijn fascinatie voor wiskunde te volgen in een academische studie wiskunde. Dit, terwijl hij al op jonge leeftijd had laten zien een groot talent te hebben voor het vak. Dit levensverhaal van Frenkel wordt gemengd met wiskundige zaken die hem fascineren en ongetwijfeld voor velen van de lezers van dit blad net zo boeiend zijn. Denk aan bespiegelingen over bijvoorbeeld symmetrie, vlechtgroepen en Betti-getallen. Ook passeert de laatste stelling van Fermat weer eens de revue en krijgt Andrew Wiles aandacht. Galois en de naar hem vernoemde Galoisgroepen worden uitvoerig beschreven. En zo gaat het maar door. Voor mij was dit deels een 'trip-down-to-memorylane' maar ik kwam er ook heel veel wiskunde in tegen waar ik nooit eerder mee was geconfronteerd. Geen idee wat een Kac-Moody-algebra was of een Hitchin-moduliruimte. Leerzaam al met al en heel goed om weer eens te lezen en tot je door te laten dringen hoe state-of-the-art wiskunde ontwikkeld wordt. Geen idee of veel van de lezers van dit blad hun wiskunde echt 'bijhouden', maar als ik voor mezelf spreek moet ik toch wel eerlijk stellen dat ik na mijn studie niet echt de studieboeken meer indook. Een blik als deze in die wereld is dan wel weer heel leuk, temeer daar Frenkel hier uitermate toegankelijk over kan schrijven. Natuurlijk, over het Shimura-Taniyama-Weil-vermoeden lezen op de manier waarop Frenkel erover schrijft, is iets totaal anders dan de

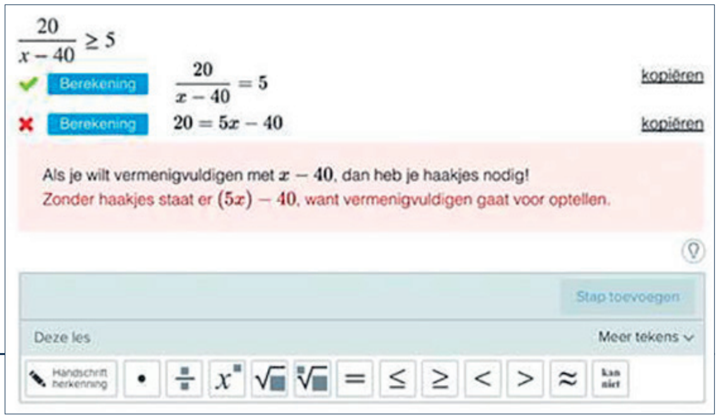
Math Plus

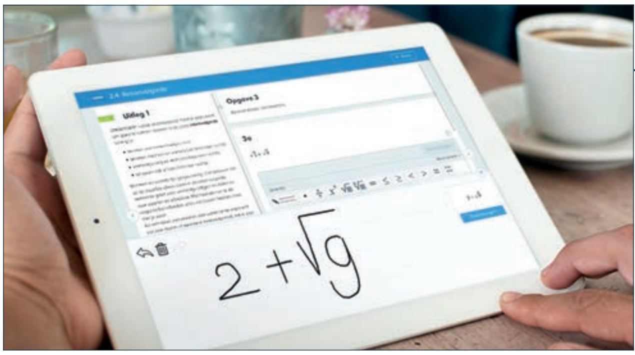
Meer tijd voor wiskunde

MathPlus zorgt voor een beter begrip van wiskunde

Interactieve opgaven met directe feedback

Met behulp van de technologie van AlgebraKIT kunnen leerlingen zelfstandig wiskundige vaardigheden trainen (zoals bijvoorbeeld ontbinden in factoren, differentiëren en vergelijkingen oplossen). AlgebraKIT ondersteunt leerlingen met stap-voor-stap feedback, hints en foutanalyse.





Handschriftherkenning

MathPlus ondersteunt handgeschreven uitwerkingen. Hierdoor wordt het mogelijk om wiskundige uitdrukkingen te schrijven op een intuïtieve en natuurlijke manier zonder toetsenbord.

MathPlus: een nieuwe generatie MAX methode van Malmberg

Meer aandacht

Max is meer dan een leermiddel. Het is een oplossing voor je dagelijkse lespraktijk. Ontworpen om jou als docent maximaal te ondersteunen en te helpen om leerlingen te laten slagen.

- Meer aandacht voor elke leerling
- Geeft rust en ruimte in je les
- We zijn er voor jou

Ontdek de voordelen van de Max licentie

- Eenvoudig switchen tussen volledig digitaal en digital en boek
- Jaarlijks nieuwe boeken
- Aantrekkelijk geprijsd

Meer informatie over MathPlus? Bezoek onze site.

kijk op www.mathplus.nl

MALMBERG
a Sanoma company

details van dit vermoeden doorgronden, maar je komt door dit boek toch weer een stuk dichter bij datgene wat je ooit gefascineerd heeft in deze discipline en wat je dan kennelijk ook nu nog steeds weet te boeien.

Langlandsprogramma

De rode draad die door de wiskunde van Frenkel loopt, is overigens een stuk wiskunde waar ik nog niet van had gehoord: het Langlandsprogramma. In de woorden van Frenkel is het 'een van de belangrijkste ideeën in de wiskunde van de laatste vijftig jaar'. Het is een theorie die allerlei verbindingen legt tussen zeer veel verschillende takken van de wiskunde. Denk daarbij aan algebra, meetkunde, getaltheorie, analyse en zelfs quantumfysica. De basis van dit Langlandsprogramma is in de jaren zestig van de vorige eeuw gelegd door Robert Langlands en hij baseerde zich op het werk van Evariste Galois. Ik moet eerlijk bekennen dat ik me afvroeg hoe het kon dat ik - als dit inderdaad een baanbrekend wiskundig idee is – er nooit eerder mee ben geconfronteerd. Tijdens mijn opleiding in de jaren zeventig zou ik toch ooit gehoord of gelezen moeten hebben over dit programma als uitvloeisel van het werk van de alom bekende en ook tijdens mijn studie vaak aangehaalde Galoistheorie? Niet dus. En zelfs nu, op het moment dat ik dit stukje schrijf, vraag ik me af of deze recensie bij publicatie in *Euclides* een stormvloed aan kritiek over me afroept ten aanzien van mijn eigen wiskundige onbenulligheid... Ik ben benieuwd. Al met al heeft dit boek me veel gebracht. Ik heb er een aantal genoeglijke uren mee doorgebracht en het heeft me regelmatig met mezelf en meer specifiek met mijn eigen wiskundeachtergrond geconfronteerd. Zo'n herbezinning op je wortels kan nooit kwaad. Wat mij betreft een aanrader voor iedereen die daar ook af en toe behoefte aan heeft. Als je tenminste een redelijke wiskundige achtergrond hebt: dit boek is - zie het begin van deze recensie - absoluut onleesbaar als je wiskundige achtergrond het middelbare-schoolvak wiskunde (zelfs niveau vwo B) niet ontstijgt.
En tot slot nog een kleine kanttekening: het duurde even voordat ik tot de conclusie kwam dat veel van de illustraties in het boek die bedoeld zijn om bepaalde wiskundige concepten te verduidelijken, ontsierd werden door grijs afgedrukte grafische elementen. In eerste instantie leidden die grijze stukjes afbeeldingen ertoe dat ik in de illustraties veel meer dacht te moeten zien dan ik zag. In tweede instantie constateerde ik dat die grijze stukjes vaak niets anders zijn dan drukfouten: ze hadden in veel gevallen niet zichtbaar moeten zijn en zijn een niet bedoelde schaduw van de zwarte delen van de afbeelding. Jammer, het werpt een klein smetje op een boek dat een verrijking van mijn boekenkast is en het is wellicht iets om recht te zetten bij een volgende druk.

Over de auteur

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *ger.limpens@gmail.com*

IS ER AFSTEMMING TUSSEN ECONOMIE EN WISKUNDE?

Ab van der Roest

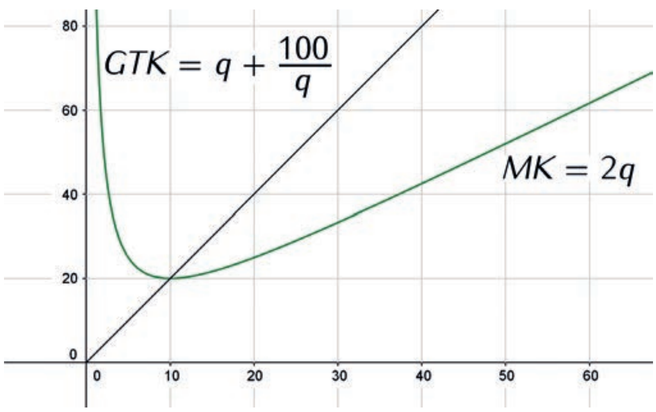
In de vorige *Euclides* was te zien dat er een groot verschil is tussen de manier waarop in het vmbo procenten behandeld worden in de economie- en de wiskundeboeken. Hoe is dat in de bovenbouw havo-vwo? Ab van der Roest ging in gesprek met zijn economiecollega's.

De taal die we in de les gebruiken is belangrijk voor leerlingen. Maar de taal is niet bij ieder vak hetzelfde. Zo is bij economie de taal anders dan bij wiskunde. Niet alleen de formele taal, bij wiskunde gebruiken we andere begrippen dan bij economie, maar ook bij het uitleggen van begrippen gebruiken we verschillende talen. In de wiskunde maken we vaak gebruik van afleidingen van formules en in de economie wordt er veel meer met woorden uitgelegd. Hoe maken we nu voor een leerling duidelijk dat we het over hetzelfde hebben? Uit onderzoek door Pauline Vos et al (2010) blijkt dat we ons als leraren nauwelijks bewust zijn van de inhoud van elkaars vak. Om effectiviteit en efficiëntie van het onderwijs te vergroten zou er een betere afstemming tussen de schoolvakken moeten zijn. Als je dus een gesprek hebt met een collega economie over de uitleg van een bepaald begrip, dan is dat een buitenkansje. Kunnen we elkaar helpen en zijn de leerlingen hiermee geholpen?

Wilco, een jonge, enthousiaste leraar economie, worstelt af en toe met het goed en verantwoord overbrengen van de lesstof. Nu is economie een totaal ander vak dan wiskunde, maar er wordt wel wiskunde gebruikt in de economie. Dit is de reden waarom ik bij een discussie tussen Wilco en zijn oudere collega Wim werd geroepen. In dat gesprek kwam een aantal vragen naar voren die met wiskunde en economie te maken hebben.
In dit artikel bekijk ik twee economische begrippen vanuit wiskundig perspectief en op de website geef ik de resultaten van een klein onderzoekje onder economieleerlingen uit vwo 6.

Voorbeeld 1: Marginale kosten
Het eerste voorbeeld gaat over de vraag: Hoe leggen we de leerlingen uit dat de *MK*-lijn (marginale kosten) de *GTK*-lijn (gemiddelde totale kosten) altijd snijdt in haar minimum? De uitleg die hier bij economie bij wordt gegeven is:
'De marginale kosten zijn de extra totale kosten van één eenheid product meer. Zolang deze extra kosten lager zijn dan de gemiddelde totale kosten van de voorgaande eenheden, zal de *GTK*-lijn dus dalen. Als de kosten van een extra eenheid hoger zijn dan gemiddeld, dan zal de *GTK*-lijn stijgen. Als de kosten van een extra eenheid gelijk is aan de *GTK* van de voorgaande, zal de *GTK* gelijk zijn aan de *MK*. Het snijpunt van de *MK*-lijn en de *GTK*-lijn is in het minimum omdat de totale kosten (*TK*) eerst minder dan evenredig stijgen (de *GTK* dalen dan dus) en vervolgens meer dan evenredig (de *GTK* stijgen dan).'

Om de vraag te begrijpen, heb ik een voorbeeld genomen dat ik ontleen aan het gesprek. Neem een kostenfunctie, zeg: $TK = 100 + q^2$. De marginale kosten worden gegeven door $MK = TK' = 2q$ en de gemiddelde totale kosten als $GTK = \frac{TK}{q} = q + \frac{100}{q}$. De grafieken van deze formules zijn in figuur 1 getekend. Het snijpunt van deze grafieken geeft dus het minimum van de *GTK*.



figuur 1

De uitleg die de economieleraar geeft, wordt lang niet altijd begrepen door de leerling. En, eerlijk is eerlijk, ik heb die ook een paar keer moeten lezen. Kan de wiskunde helpen? Ja, en zelfs op een verrassend eenvoudige manier. De definitie van de *gemiddelde totale kosten* is

$GTK(q) = \frac{TK(q)}{q}$. Ik gebruik hier bewust de functienotatie. Als we nu het minimum van $GTK(q)$ met de afgeleide bepalen, dan ligt het voor de hand dat we de quotiëntregel gebruiken. Dit geeft dan:

$GTK'(q) = \frac{q \cdot TK'(q) - TK(q) \cdot 1}{q^2}$. Het minimum vinden we door de afgeleide gelijk aan nul te stellen en de vergelijking op te lossen. Dit geeft:

$q \cdot TK'(q) - TK(q) = 0$. En dus $TK'(q) = \frac{TK(q)}{q}$

en hierin herkennen we $MK(q) = GTK(q)$.

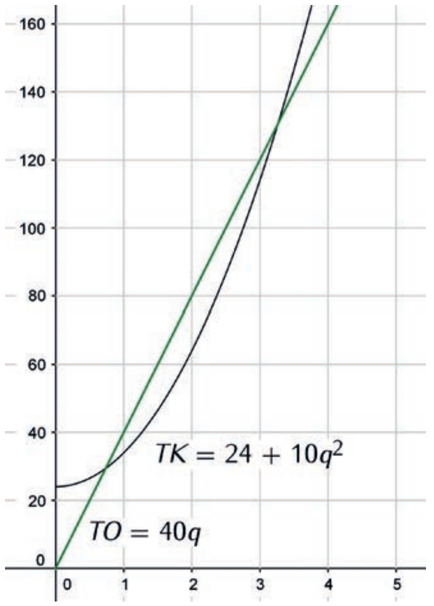
Een mooi voorbeeld waar twee schoolvakken elkaar kunnen helpen De economieleraar kan de wiskunde gebruiken om woorden kracht bij te zetten met het afleiden van formules en de wiskundeleraar heeft een mooie toepassing van de afgeleide functie op het gebied van de economie. Bij afgeleide denken we vaak alleen maar aan een nieuwe functie waarmee we een richtingscoëfficiënt kunnen bepalen, maar dat het ook gaat om een verandering wordt nogal eens vergeten.

Ik denk dat een leerling ermee geholpen kan zijn wanneer beide uitleggen gepresenteerd worden. De meer talige leerling zal gebaat zijn bij de uitleg van de econoom en de iets meer op formules gerichte leerling bij de toelichting van de wiskundige. Daarnaast wordt de wiskunde concreet toegepast om een economisch begrip uit te leggen. Hiermee laat je zien dat wiskunde toegepast wordt in andere vakken. Er is een samenhang tussen vakken die in de school vaak onbenoemd blijft. Dat samenhang tussen vakken belangrijk is, toonde Gerrit Roorda in 2006 al aan in het artikel 'Samenhang, waar te beginnen' in *Euclides* 81-7.

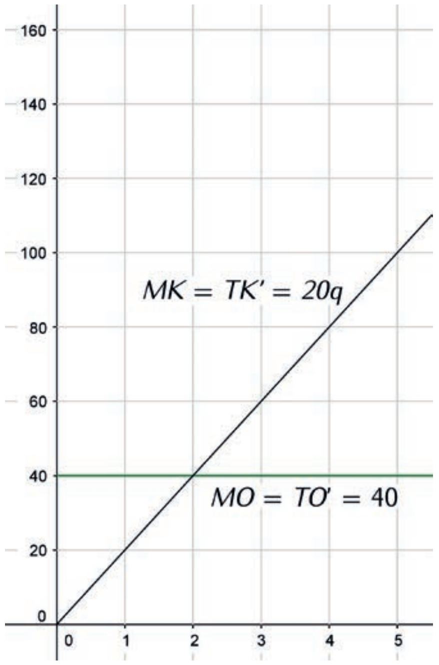
Voorbeeld 2: Maximale winst
Het tweede voorbeeld waarbij we elkaars taal kunnen gebruiken, gaat over het maximaliseren van winst. Ook in dit voorbeeld kan het verhelderend zijn voor leerlingen als we wiskunde gebruiken. De economische uitleg gaat als volgt:

'Wanneer ondernemers streven naar maximale winst, produceren ze tot het punt waarbij de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten ($MO = MK$). Immers, wanneer ze dan nóg een extra eenheid produceren, zijn de extra kosten (*MK*) groter dan de extra opbrengsten (*MO*) van die eenheid. Tevens is de winst maximaal wanneer de totale winst (*TW*) op haar hoogtepunt is (top van de parabool) en dus het verschil tussen *TO* en *TK* het grootst is.
Immers, *totale winst* (*TW*) =
totale opbrengsten (*TO*) — *totale kosten* (*TK*).

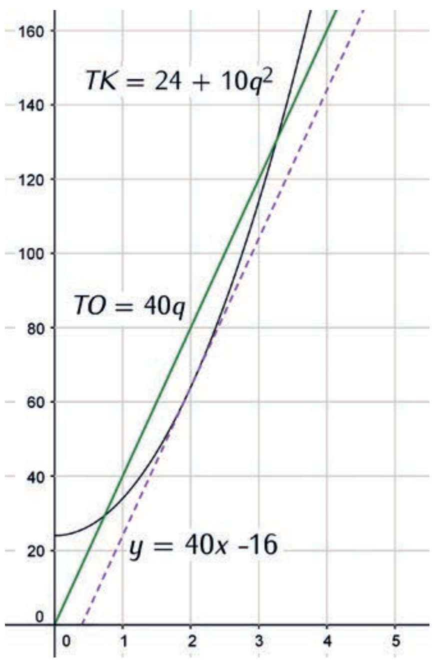
We bekijken een voorbeeld met een opbrengstfunctie $TO = 40q$ en een kostenfunctie van $TK = 24 + 10q^2$.



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Als je de uitleg van de econoom goed leest, is het duidelijk wat er gesteld wordt. Maar een visueel ingestelde leerling, die de grafiek van de totale opbrengst en de totale kosten maakt, heeft niets aan het plaatje, zie figuur 2. Hier corresponderen de woorden niet met het beeld, omdat je de grafiek van de functie ziet en niet die van zijn afgeleide. In de tekst staat dat $MK = MO$ en bijbehorende grafiek ziet er dan zo uit als in figuur 3. Maar ook hier zie je niet veel aan. Het echte begrip wordt duidelijk als we figuur 4 goed bestuderen. Het gaat dus niet om de grafiek van de totale opbrengst, maar om een raaklijn evenwijdig met die grafiek. De raaklijn met de vergelijking $y = 40x - 16$. Ik heb bewust even andere letters gebruikt, voor het onderscheid.

Blijft hier natuurlijk nog wel over dat het verschil tussen totale opbrengst en totale kosten het grootst is in dit raakpunt. Als we ook hier het functiebegrip en de afgeleide functie gebruiken, is de uitspraak in kader 2 voor een wiskundige meteen duidelijk. Ik hoop dus ook voor de leerlingen. De totale winst is namelijk het verschil tussen de totale opbrengst en de totale kosten: T
$W(q) = TO(q) – TK(q)$.

Afgeleide nemen en deze aan nul gelijk stellen geeft een maximum:

$TW'(q) = TO'(q) – TK'(q) = 0$. Met deze vergelijking is meteen in te zien dat $TO'(q) = TK'(q)$ of in de economietaal: $MO = MK$.

Vanzelfsprekend zal de wiskundeleraar deze woorden en symbolen ook moeten gebruiken. Eerst gebruikte ik altijd $W = R – K$ als formule voor de winst. Ik kan me voorstellen dat dit voor zwakkere leerling heel verwarrend kan zijn. Ze moeten ook al de stap maken van $f(x)$ naar $R(q)$ en krijgen daarbij een ander symbool voorgeschoteld dan bij economie, waar TO gebruikt wordt. Menig leerling raakt dan de weg kwijt en heeft dus niets aan de samenwerking tussen de wiskunde- en de economieleraar...

Bij het schrijven van dit artikel en na het bespreken hiervan met de docent economie, werd ik benieuwd of leerlingen makkelijk schakelen tussen economie en wiskunde. Ervaren zij een vorm van samenhang, of zijn wiskunde en economie gescheiden werelden voor hen? Ik heb daarom een klein onderzoekje gedaan in vwo-6, in de laatste les voor de laatste toets, eigenlijk de laatste les op de middelbare school. Het resultaat van dit onderzoek staat op de website.

vakbladeuclides.nl/925roest

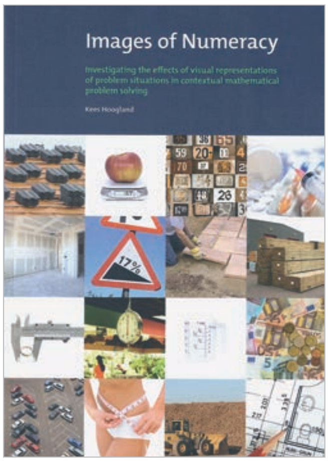
Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. Dit schooljaar verblijft hij in China en zal hij ons van daaruit berichten.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

BOEKBESPREKING

WOORDEN OF PLAATJES?

Bert Zwaneveld

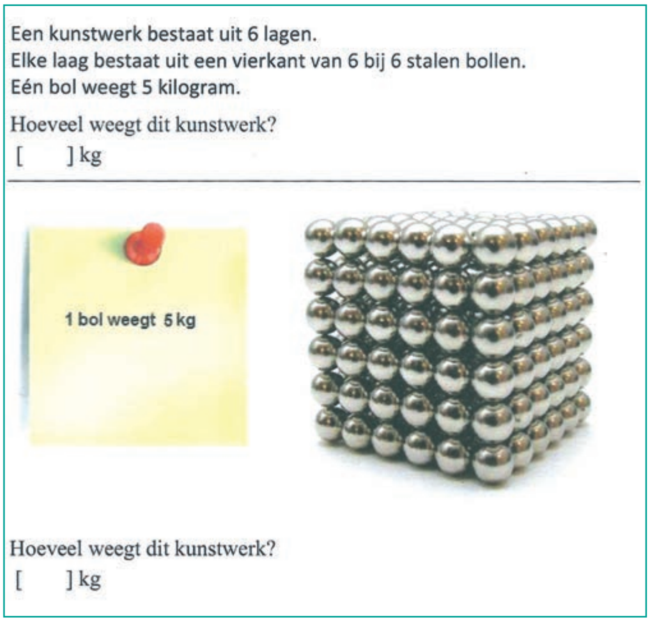


Auteur: Kees Hoogland
Uitgever: TU Eindhoven, (2016)
ISBN: 978-90-386-4156-0
Proefschrift (265 pagina's)

Op 8 november is Kees Hoogland gepromoveerd op het proefschrift *Images of Numeracy, Investigating the effects of visual representations of problem situations in contextual mathematical problem solving*. Het onderzoek van Kees, onder andere oud-hoofdredacteur van *Euclides*, gaat over de vraag of bij realistische rekenopgaven, zoals die in de rekentoetsen 2F voorkomen, het representeren van de probleemsituatie in de vorm van een plaatje, meestal een foto, tot betere prestaties leidt dan bij het presenteren van de probleemsituatie in woorden (zie figuur 1 voor een voorbeeld). In de woorden van Kees: 'In presenting contextual mathematical problems, what is the effect on student performance of changing a descriptive representation of the problem situation to a mainly depictive one?'

Theoretisch kader

In het eerste hoofdstuk geeft Kees de theoretische achtergrond voor zijn onderzoek. Hij stelt dat het bij het reken- en wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs en het beroepsonderwijs steeds meer om wiskundig redeneren en probleem oplossen gaat, omdat deze vaardigheden essentieel zijn voor het dagelijks leven en de beroepsuitoefening. Daar komt bij dat de moderne technologie wiskundige bewerkingen en technieken heel goed kan uitvoeren. Vervolgens inventariseert hij wat er uit onderzoek bekend is over het oplossen van wat vaak woordopgaven, of tegenwoordig ook redactiesommen worden genoemd: verbale beschrijvingen van probleemsituaties waarin een of meer vragen worden opgeworpen, waarbij voor de beantwoording wiskundige bewerkingen moeten worden toegepast op numerieke gegevens uit de probleemsituatie. Van de twee grootste problemen die leerlingen bij het oplossen van dit soort opgaven laten zien, is het ene dat zij op tamelijk willekeurige wijze bewerkingen op de numerieke gegevens uitvoeren. Een bekend voorbeeld is dat er iets over een schip wordt verteld, zoals hoeveelheid lading, bemanning, snelheid, bestemming, en dat gevraagd wordt hoe oud de kapitein is, en dat het hun ook nog lukt om een antwoord te vinden. Het andere probleem is dat leerlingen niet in staat zijn betekenis te geven aan de gegeven probleemsituatie. Voor het oplossen van het probleem is dit betekenis geven een cruciale stap. Hier ligt ook de koppeling met het onderzoek naar wiskundig modelleren, waar betekenis geven, het conceptualiseren van de probleemsituatie, veel aandacht krijgt. Betekenis geven vindt bijvoorbeeld plaats door hoofd- en bijzaken te onderscheiden en door in te zien welke relaties er tussen de gegevens zijn. Mede op basis van deze theoretische noties heeft Kees ervoor gekozen te onderzoeken of een andere, visuele representatie van de probleemsituatie, in de vorm van een foto, in vergelijking tot een verbale representatie, in woorden dus, tot betere resultaten zal leiden. Terzijde zij opgemerkt dat in de internationale literatuur het onderscheid rekenen – wiskunde niet wordt gemaakt, er is altijd sprake van wiskunde of wiskundeonderwijs, ook als het over (uitsluitend) rekenen gaat. Net als in het proefschrift, wordt dit gebruik in deze recensie gevolgd.



figuur 1 Probleem in woorden (boven) en in beelden

Vooronderzoek

In het tweede hoofdstuk doet Kees verslag van het vooronderzoek waarin hij heeft geprobeerd te achterhalen hoe negentien (v)mbo-leerlingen omgaan met de bedoelde opgaven, en of de bestaande domeinindeling (getallen, verhoudingen, meten & meetkunde, verbanden) bruikbaar is voor zijn onderzoek. Dat bleek het geval. Opvallend is verder dat in het geval dat de leerlingen met een artefact dat ze hadden gemaakt over het oplossen van problemen spraken, zij dat op een behoorlijk wiskundige manier deden en dat ondersteunden met allerlei gebaren. Uiteraard gebruikten ze daarbij niet het typisch wiskundige jargon. Je voelt door zijn tekst heen de bewondering van Kees voor wat deze leerlingen kunnen.

Meetinstrument

Het derde hoofdstuk gaat over het ontwerpen en valideren van het instrument waarmee hij zijn onderzoeksvraag is gaan onderzoeken. De kern van de vele activiteiten die Kees in dit verband heeft ondernomen, is dat hij van veertig opgaven van het 2F niveau rekenen de probleemsituatie door een foto heeft vervangen en dertien deskundigen deze veertig opgaven heeft laten bespreken, wat tot aanpassingen heeft geleid, en hen vervolgens heeft laten beoordelen of de verbale versie en de visuele gelijkwaardig zijn: toetsen ze dezelfde wiskundige kennis en vaardigheden, indien ja, doen ze dat op hetzelfde niveau? Bovendien moesten de deskundigen van elke opgave aangeven op een vijfpuntsschaal of deze te makkelijk voor niveau 2F, makkelijker, precies op niveau 2F, moeilijker of te moeilijk voor niveau 2F was. Dit heeft tot de 21 definitieve toetsopgaven geleid. Met deze 21 opgaven heeft een proefafname plaatsgevonden, waaraan bijna 7500 leerlingen van 63 verschillende scholen, in leeftijd variërend van elf tot achttien jaar hebben meegedaan. Dit heeft het uiteindelijke instrument opgeleverd, waarmee grootschalig is nagegaan wat het verschil tussen de verbale en de visuele versie is.

Opzet en resultaten

Kees vermoedde dat de visuele versie van de opgaven een hogere score zullen krijgen dan de verbale versie. De toets met de 21 items, *at random* in de verbale dan wel in de visuele versie, in een willekeurige volgorde, is digitaal afgenomen en gescoord met 31.842 leerlingen van 179 scholen, goed gespreid over het land. Het gaat om een deelnamepercentage van ongeveer twee procent van de totale leerlingenpopulatie van elfjarigen (basisonderwijs) tot en met twintigjarigen (mbo). Ook werd een aantal achtergrondgegevens van de deelnemers vastgelegd: schooltype, klas, geslacht, etniciteit (een of beide ouders niet in Nederland geboren), leeftijd en laatst behaalde cijfer voor wiskunde. Het resultaat was als volgt. Over alle deelnemende leerlingen was de gemiddelde score op de verbale versie van de opgaven 0,44, terwijl die op de visuele versie van de opgaven 0,45 was. De standaarddeviaties waren respectievelijk 0,44 en 0,45. Ook de resultaten per schooltype worden gegeven, zie daarvoor tabel 1. Met de *t*-toets op de gemiddelde correcte scores vond Kees dat het gemiddelde op de opgaven met de verbale probleemsituatie 0,436 (standaarddeviatie 0,234) was en op de opgaven met de visuele probleemsituatie 0,455 (standaarddeviatie 0,237). Het verschil van 0,019 is statistisch significant. Maar dat is bij deze steekproefomvang niet verwonderlijk. De effectgrootte van 0,09 moet echter als heel klein worden beschouwd. De verbetering in score is 1,9 procentpunt. Het beeld van de resultaten per subgroep is vrijwel identiek aan die voor de hele groep deelnemende leerlingen met een lichte uitzondering voor geslacht. De variabele geslacht kan voor 35% het gemeten effect verklaren. Samenvattend, althans volgens Kees: een robuust resultaat.

schooltype	gemiddelde score verbale versie (standaarddeviatie)	gemiddelde score visuele versie (standaarddeviatie)	aantal leerlingen
totaal	0,44 (0,44)	0,45 (0,45)	31.842
bo	0,24 (0,42)	0,25 (0,43)	969
vmbo_bb	0,18 (0,38)	0,19 (0,39)	1.932
vmbo_kb	0,26 (0,44)	0,28 (0,45)	2.658
vmbo_gt	0,36 (0,48)	0,37 (0,48)	7.869
havo	0,49 (0,50)	0,50 (0,50)	8.918
vwo	0,60 (0,49)	0,62 (0,48)	7.670
mbo	0,52 (0,50)	0,54 (0,50)	1.146
meisjes	0,42 (0,49)	0,44 (0,50)	15.637
jongens	0,46 (0,50)	0,48 (0,50)	15.766
beide ouders in Nederland geboren	0,45 (0,50)	0,47 (0,50)	24.183
een of beide ouders niet in Nederland geboren	0,39 (0,49)	0,41 (0,44)	7.220

Tabel 1 Correcte scores

Vervolgens is Kees met een geavanceerde statistische techniek nagegaan of de achtergrondvariabelen schooltype (heel vmbo als één type), klas, geslacht, etniciteit, leeftijd en wiskundecijfer hebben bijgedragen aan de correcte score. Dat bleek niet het geval te zijn.
Aan het eind van dit hoofdstuk geeft Kees een checklist voor de plaatjes (foto's) om de probleemsituatie te representeren: de plaatjes moeten realistisch zijn en relevant voor het oplosproces, zij moeten een integraal onderdeel van de probleemsituatie zijn, niet louter illustratie, en ze

Leraren in positie

De wet Beroep Leraar, waar het lerarenregister onderdeel van uitmaakt, versterkt de positie van leraren in het po, vo, (v)so en mbo, bakent het beroep af en gaat onbevoegdheid tegen. Leraren krijgen meer zeggenschap over de uitoefening van hun beroep en meer ruimte om zelf richting te geven aan de ontwikkeling van het onderwijs. Bij die ruimte en zeggenschap hoort ook verantwoording. En die leggen leraren af over hun bekwaamheidsonderhoud in het lerarenregister. Hiervoor worden door leraren criteria opgesteld. De Onderwijscoöperatie organiseert het gesprek onder leraren hoe zij inhoud willen geven aan het vaststellen van die herregistratiecriteria.

Wil je meer weten over het lerarenregister? Kijk op **registerleraar.onderwijscooperatie.nl**

onderwijs coöperatie
van, voor en *door* de leraar

AOb · CNV Onderwijs · Federatie van Onderwijsvakorganisaties · Platform VVVO Vakinhoudelijke Verenigingen Voortgezet Onderwijs

moeten relevant zijn voor de wiskundige begrippen en modellen die bij het oplosproces horen.

Karakteristieken van de opgaven

In het vijfde hoofdstuk gaat Kees nader in op de taakkarakteristieken van de verbale en visuele versie: aantal woorden, respectievelijk het aantal beeldfragmenten, en op het domein van de opgaven. Bij dat laatste blijkt inderdaad een afhankelijkheid. De afhankelijkheid met het domein is het sterkst bij meten & meetkunde, minder sterk bij getallen, nog minder sterk bij verhoudingen. Dit mocht overigens op basis van de literatuur verwacht worden. De voorzichtige conclusie over de afhankelijkheid met het aantal woorden dan wel het aantal plaatjes is dat een vervanging van 25 woorden door één plaatje tot een verbetering kan leiden van ongeveer acht procentpunten in de kans dat een opgave correct beantwoord wordt.

Replicatieonderzoek

In het zesde en voorlaatste hoofdstuk doet Kees verslag van een replicatieonderzoek met 420 volwassen deelnemers van het Groot Nationaal Rekenonderzoek van de VPRO en de NTR in samenwerking met NWO. Het eerdere grootschalige onderzoek onder leerlingen werd bevestigd: een 1,1 procentpunt hogere score op de visuele opgaven en het grootste effect bij opgaven uit het domein meten & meetkunde. Wel werden nu bij minder opgaven significante verschillen gevonden, volgens Kees te wijten aan het veel kleinere aantal deelnemers.

Conclusies

De belangrijkste conclusie is dat de onderzoeksvraag positief kan worden beantwoord. Kees beschouwt zijn positieve resultaat niet als definitief. Hij ziet deze eerder als startpunt voor verder onderzoek naar het effect van de verandering in representatie van de probleemsituatie. Zo geeft het verschil in de manier waarop leerlingen over hun ervaringen met probleem oplossen praten in een interview dan wel met een artefact dat ze zelf hebben gemaakt een indicatie voor hoe onderzoek naar probleem oplossen aangepakt kan worden.
Een andere belangrijke beperking van het onderzoek van Kees is dat er met slechts 21 opgaven is gewerkt en dat afname en scoring digitaal was. Een vervolgonderzoek zonder een van deze twee beperkingen ligt voor de hand. Uit de literatuur noemt Kees verder nog dat leerlingen met een sociaal zwakkere achtergrond het slechter doen op 'real-life problemen'.
Tot slot gaat Kees in op de relevantie van zijn onderzoek. Als eerste groep voor wie dit onderzoek relevant is, noemt hij toets- en methodeauteurs die op zoek zijn naar authentiekere, realistischere opgaven die wellicht betekenisvoller zijn voor de leerlingen. Als tweede groep de wiskundeonderwijsonderzoekers. Voor hen is het relevant om beter inzicht te krijgen in het gedrag van leerlingen bij het oplossen van contextrijke wiskundeopgaven, zoals hoeveel tijd de leerlingen nodig hebben voor lezen en oplossen, en welke overwegingen zij hebben bij het oplossen. Met de steeds grotere mogelijkheden van de technologie is het zeker ook relevant na te gaan hoe die mogelijkheden ingezet kunnen worden om het 'echte' leven nog meer de wiskundeles binnen te krijgen. De relevantie van het onderzoek voor het werken in de wiskundelessen is de genoemde checklist voor plaatjes. En dit geldt uiteraard nog sterker voor de ontwerpers van de rekentoetsen. Kees merkt daarover terecht op dat hij inmiddels voorbeeldrekentoetsen heeft gezien die met zijn resultaten rekening houden.

Discussie

Ten slotte een paar vragen die bij mij opkwamen bij het lezen. Waren de twee versies van een opgave, de visuele en de verbale, inderdaad gelijkwaardig? Ik kan me niet aan de indruk onttrekken dat de visuele wat makkelijker waren. De leerlingen hoeven zich bij de visuele representatie nauwelijks af te vragen waar de vraag over gaat. Nu weet ik wel dat dat precies de bedoeling van Kees was, namelijk de aandacht van de leerlingen goed richten, maar je moet ook *leren* je aandacht goed te richten. Een andere vraag is wat we nu als wiskundeonderwijzers meer weten door dit onderzoek. Tijdens de verdediging werd deze vraag gesteld en er kwam voor mij geen bevredigend antwoord. Kees herhaalde dat de visuele versies het beter doen van de verbale. En nog een andere vraag is hoe de scores uit tabel 1 zich verhouden tot de scores op de laatst afgenomen rekentoetsen 2F. De scores op de verbale versie van tabel 1 lijken dan aan de lage kant. Misschien komt dat door het afnamejaar 2011 tijdens het onderzoek. Dat was namelijk een van de eerste jaren van de toen nog experimentele rekentoets.
Deze vragen doen overigens niets af aan mijn waardering voor het gedegen onderzoek. En uiteraard ben ik blij met elke promotie op het gebied van wiskundeonderwijs. Alle hulde voor Kees.

Over de auteur

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs van de Open Universiteit.
E-mailadres: *zwane013@planet.nl*

DOCEREN IN ZUID-AFRIKA

Andrea Morgan
Heleen van der Ree

Ongelijkheid

Als je het onderwijs in Zuid Afrika probeert te omschrijven, dan ontkom je er niet aan om het woord ongelijkheid in de mond te nemen. Het onderwijssysteem is gevormd door complexe historische problemen en men staat voor uitdagingen die ieder jaar lijken toe te nemen, zoals de groter wordende kloof tussen scholen die goed en minder goed presteren.

Een aantal scholen heeft nauwelijks een ingericht gebouw, er ontbreekt goede leiding, de docenten zijn niet of nauwelijks gekwalificeerd, de vakbonden werken soms tegen en de klassen zijn veel te groot. Zestig leerlingen in een lokaal waar maar dertig bankjes staan, is niet ongebruikelijk. Veel docenten wonen ook nog eens op zeer grote afstanden van de plattelandsscholen waar ze werken, zodat ze zich niet verbonden voelen met de school en de gemeenschap rondom die school.

figuur 1 Phayiphini High School

En niet alleen de scholen staan voor uitdagingen, de leerlingen zitten zelf vaak ook met persoonlijke problemen zoals werkloze ouders of voogden, een thuisfront geleid door kinderen, omdat ouders zijn overleden of vertrokken, en een tekort aan voedsel. Zuid-Afrika heeft negen officiële talen en de meeste leerlingen krijgen geen wiskundeles in hun moedertaal. In de media wordt breed uitgemeten hoe de kinderen soms mijlen ver moeten lopen en rivieren moeten doorwaden om naar school te komen. 's Winters lopen ze soms uren voor zonsopkomst, hetgeen een risico vormt voor hun veiligheid. Maar echte oplossingen zijn nog niet gevonden.

Geen simpele oplossing

Onderzoek toont aan dat Zuid-Afrikaanse kinderen het belang van wiskundeonderwijs méér inzien dan leeftijdsgenoten in andere landen, maar toch worden standaarden niet gehaald. Volgens het TIMSS 2011 rapport (*Trends in Mathematics and Science Studies*) is Zuid-Afrika het slechtst presterende land onder de landen met een gemiddeld inkomen. Geen wonder, gezien de eerder geschetste problemen. Uiteraard zijn er ook zeer goede scholen in Zuid-Afrika, maar geld speelt een belangrijke rol bij de schoolkeuze.

Scholen waar voldoende financiële middelen zijn, zien een uitdaging in het meegaan met technologische ontwikkelingen, maar het merendeel van de scholen probeert het hoofd boven water te houden met de meest elementaire middelen. Gelukkig zijn er individuen en organisaties actief om het onderwijs en dus de kwaliteit van het leven te verbeteren. Er is geen simpele oplossing. Of zoals de voormalige president Nelson Mandela het zei: 'Als je de top van de berg beklommen hebt, dan pas zie je dat er nog veel meer bergen te beklimmen zijn.'

figuur 2 Van links naar rechts: Judith Miller, Miss Phindile Gwala, Mrs Boyi Mtshali, Mr Monakali, Mr Hlabe en Mrs Zondi (headmistress).

Wiskundeboeken

Het Wereldwiskunde Fonds heeft het afgelopen jaar twee keer een school en de leerlingen in Zuid-Afrika geholpen met het aanschaffen van wiskundeboeken. Medeauteur van dit artikel, Andrea Morgan, is lerares op een meisjesschool in Hilton, vlak bij Pietermaritzburg. In haar vrije tijd heeft ze wiskundeboeken geschreven en deze worden in goedkope druk uitgegeven. A4-blaadjes, in een

ringband en de enige kleur is te vinden op het voorblad. Maar de boeken staan vol hele mooie wiskundeopgaven, gericht op het curriculum dat in Zuid-Afrika wordt voorgeschreven.[1] Haar school zelf heeft de steun van het Wereldwiskunde Fonds niet nodig, maar in de omgeving van Pietermaritzburg zijn wel veel scholen die deze hulp heel goed kunnen gebruiken. Voor de Phayiphini High School resulteerde de aanschaf van boeken voor 150 leerlingen dit jaar in goed wiskundeonderwijs. Deze school wordt voor de wiskunde bijgestaan door een gepensioneerde lerares, Judith Miller, die de docenten didactisch ondersteunt. De boeken gaan meerdere jaren mee, dus ook de komende jaren zullen veel leerlingen de vruchten plukken van deze aankoop.

Uiteraard is dit slechts een druppel op een gloeiende plaat, maar er is in Zuid-Afrika een groot bewustzijn van het feit dat men voor uitdagingen staat en de maatschappelijke steun om het wiskundeonderwijs te verbeteren groeit. We hebben als land wel voor hetere vuren gestaan. Er is hoop!

Noten

[1] Zie: *www.toolboox.co.za*

Over de auteurs

Andrea Morgan is wiskundelerares op de meisjesschool St Anne's in Hilton, Kwazulu Natal. Ze is de schrijver en uitgever van KEY BOOKS, een lesmethode die het hele curriculum in Zuid-Afrika dekt.
E-mailadres: *Amorgan@stannes.co.za*
Heleen van der Ree is beleidsmedewerker bij de NVvW en secretaris van het Wereldwiskunde Fonds.
E-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*

MEDEDELING

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Op 17 maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op twaalf universiteiten. De opgaven en uitwerkingen zijn na afloop gepubliceerd op *www.wiskundeolympiade.nl*.
Ongeveer 1000 leerlingen waren uitgenodigd voor de tweede ronde. De leerlingen deden mee in drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer 40 leerlingen uitgenodigd worden voor de finale in september. Wie deze winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekendgemaakt.

FACEBOOKPAGINA LERAAR WISKUNDE

Al meer dan tweeduizend wiskundedocenten zijn lid van de facebookpagina Leraar wiskunde! Op facebook wisselen zij nieuwtjes uit, delen filmpjes en geven elkaar tips. Lesmateriaal wordt met elkaar gedeeld via een aan de pagina gekoppelde google drive. Tijd om eens een kijkje te nemen!
Op 2 februari stelde Marieke Diepenveen de vraag of iemand tips heeft voor een praktische opdracht statistiek voor 2 havo. Een greep uit de reacties:

- De eigen klas in beeld brengen. Elk groepje onderzoekt een ander aspect, bijvoorbeeld afstand huis-school, hobby's. De resultaten verwerken in diagrammen en die op een A3 poster presenteren.
- Een opdracht over smarties die op google drive staat
- Analyse van de eigen cijfers.
- Opdracht met M&M's voor 3 mavo die het altijd goed doet bij leerlingen.
- Leerlingen zelf een vragenlijst laten afnemen over een zelf gekozen onderwerp, zoals support van voetbalclub, lievelingseten, schoenmaat)

TEGENVOETER

CALCULEREN EN REGISTREREN

Roland Meijerink

Sinds twee jaar ben ik docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek houd ik u op de hoogte van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.

Grafische rekenmachine

's Lands wijs, 's lands eer. Zaken die op de ene school als een probleem of controversieel worden gezien, zijn dat bij een andere niet – en omgekeerd. Dat effect is natuurlijk nog sterker als de scholen in verschillende landen liggen. Via *Euclides*, *Facebook* en de *WiskundE-brief* blijf ik op de hoogte van wat er bij jullie zoal wordt bediscussieerd. Met interesse volg ik de discussie over de grafische rekenmachine (GR). In Nieuw-Zeeland leeft die discussie helemaal niet. Bij alle wiskunde-examens zijn de in Nederland gangbare grafische rekenmachines toegestaan, met uitzondering van de CAS (Algebra) variant. Alleen bij onze versie van Wiskunde A op het allerhoogste niveau is de CAS-variant wél toegestaan. De GR is niet verplicht en de examens zijn in principe dan ook zonder te doen. Het percentage leerlingen mét GR blijkt sterk te variëren tussen niveaus en scholen, namelijk tussen 10 en 100 procent. Er is één algebratoets in het eerste jaar van de bovenbouw over basisvaardigheden waar de rekenmachine helemaal verboden is.
Bij andere toetsen kan de GR leerlingen helpen of tijd besparen. Bijvoorbeeld omdat ze een kwadratische vergelijking kunnen oplossen door de coëfficiënten in te voeren, in plaats van te factoriseren of de *abc*-formule toe te passen. Door middel van andere sommen, waar de coëfficiënten algebraïsch zijn, wordt de kennis van die laatste onderwerpen toch wel getest. Docenten *resetten* het geheugen voor de examens; men lijkt zich geen zorgen te maken over valsspelen en examenstanden. Sowieso krijgen leerlingen een formuleblad bij het examen (met bijvoorbeeld de *abc*-formule en log-rekenregels).

Lerarenregister

Een ander 'heet' onderwerp bij jullie is het verplichte lerarenregister. In Nieuw-Zeeland kennen we de *Education Council*, een overheidsorganisatie waar je je als beginnend leraar moet registreren. Voor een voorlopige registratie heb je een lesbevoegdheid nodig en zonder registratie kun je niet lesgeven. Na twee jaar (met verplichte extra begeleiding) wordt de voorlopige registratie omgezet in een volledige. Als ervaren docent moet je je volledige registratie iedere drie jaar vernieuwen. Onderdeel van die procedure is bewijs van 'voldoende' nascholing, een jaarlijkse beoordeling door je werkgever, en een Verklaring Omtrent Gedrag. In geval van ernstig wangedrag of (heel) slecht functioneren kan je registratie worden ingetrokken.

De beoordeling gebeurt aan de hand van twaalf criteria.[1] Het idee is dat je gedurende het jaar 'bewijs' verzamelt dat je aan deze criteria voldoet. Dat kan een observatie zijn door een collega, een foto of video, een cursus die je hebt gedaan, feedback van leerlingen, een mailtje dat je hebt verstuurd of ontvangen, enzovoort. Ik probeer dit zelf bij te houden in *Microsoft OneNote*; gedurende het jaar sleep ik daar dingen in en in principe hoef ik aan het eind van het jaar geen hele verhalen meer te typen. Je hoeft dat hele dossier trouwens niet naar de *Education Council* te sturen; je leidinggevende tekent ervoor.
Persoonlijk vind ik het wel een sympathiek systeem: je moet aantoonbaar bezig zijn met je professionele ontwikkeling, maar 'officiële' nascholing is daar slechts een onderdeel van.
Meer lezen? Ga naar *www.tegenvoeters.nl* of stuur een reactie naar *meijerinkmr@gmail.com*.

Noten

[1] Zie voor de beoordelingscriteria voor leraren: *https://educationcouncil.org.nz/*

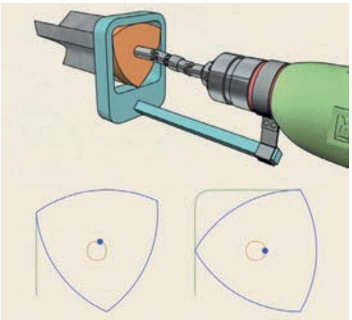
WISKUNDE DIGITAAL

VEELVLAKKEN

Lonneke Boels

Wist je dat je met een gewone boormachine en een speciale boor een vierkant gat kunt maken? En wat zijn flexibele veelvlakken en kun je die zelf maken? Op de website *Etudes* staan filmpjes over dit soort wiskundige en alledaagse problemen. Lonneke Boels bespreekt de website voor het gebruik in de klas.

Heb je altijd al willen weten hoe je een vierkant gat kunt boren? Het filmpje hierover laat zien hoe wiskunde is gebruikt om een geschikte boor te ontwerpen. De vierkante kromme wordt gemaakt door een driehoek die ronddraait om een middelpunt. Dit middelpunt zelf draait tegelijkertijd rond op een cirkel. Kijk bij 'constant width curves' en dan 'drilling square holes'. Als u met leerlingen meer met dit onderwerp wilt doen, kijk dan eens in het zebraboekje 38 *SpiroSporen* van Stephan Berendonk en Leon van den Broek.



figuur 1 Een vierkant gat boren

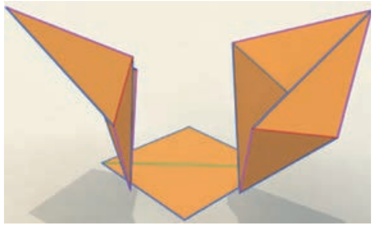
Het filmpje bij 'flexible polyhedra' laat zien dat kasten zonder achterkant nogal wankel zijn. Door de achterkant dicht te spijkeren, verdwijnt de flexibiliteit van dit veelvlak. Maar zijn er ook dichte flexibele veelvlakken? Dit is eeuwenlang een open vraag geweest. Uiteindelijk waren mensen in staat ze te bouwen maar was er een nieuwe vraag: verandert het binnenvolume van het veelvlak als dit veelvlak van vorm verandert? De wiskundige Sabitov heeft dit probleem opgelost voor flexibele veelvlakken in 3D. In hogere dimensies dan 3D is dit nog steeds een open probleem... Welke leerling lost dit op?

In het filmpje zie je hoe het veelvlak in elkaar wordt gezet en hoe deze vervolgens beweegt. Op de website zijn nog veel meer filmpjes te vinden over onderwerpen zoals bijzondere krommen, krommen met een 'vaste breedte', interactieve *etudes*, de binnen- en buitenzijde van veelvlakken en nog veel meer.

Pluspunten

- De website is in vier talen beschikbaar: Engels, Russisch, Frans en Italiaans.

figuur 2 De flexibele kast



figuur 3 De onderdelen van een flexibel veelvlak

- Bij de filmpjes staat uitleg over wat er in het filmpje wordt getoond en relevante feiten, waaronder de belangrijkste wiskunde.
- Het doel van de website is om wiskunde interessanter en toegankelijker te maken door onder andere toepassingen in het dagelijks leven en open wiskundige problemen te laten zien.
- De problemen worden zodanig gepresenteerd dat ze voor middelbare scholieren goed te begrijpen zijn. De achterliggende wiskunde is soms heel ingewikkeld.
- De Russische teksten in de filmpjes zijn niet storend.

Minpunten

- Er is geen tekst of uitleg als het filmpje afspeelt.
- Op de website staan verwijzingen naar games in de iPad-store maar de links daarvan werken niet, ook niet als je de appstore op VS zet.

Geschikt voor: middelbare school, alle niveaus.
Eindoordeel: 'aanschaffen'
Kosten: gratis
Getest op: laptop met Google Chrome 54.0.2840.99 m 64-bit
Makers: Steklov Mathematical Institute. Russian Academy of Sciences.
Te vinden via: *http://www.etudes.ru/en/*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@chrlyceumdelft.nl*

VASTGEROEST

Ab van der Roest

FUN-HOEKEN

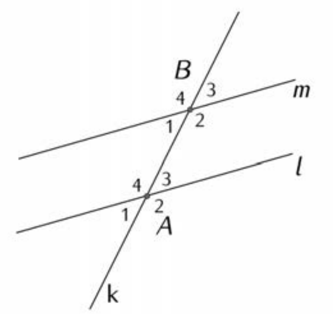
結皮

Columnist Ab van der Roest verblijft een jaar in China. Ook daar heeft hij mooie observaties van wiskunde als menselijke activiteit. Deze keer over FUN-hoeken. Wat dat zijn? Over een paar minuten weet u het en vergeet u het nooit meer.

MSG (Modular Study Group) is een instituut dat ouders helpt bij *homeschooling*. Het is geen reguliere school en kan ook geen diploma's verstrekken. Leerlingen krijgen ook maar een select aantal vakken aangeboden: wiskunde, *science* en Engels. Dit jaar mag ik hier wiskunde geven. We gebruiken een Amerikaanse methode (*Glencoe Mathematics*) die echt anders van opzet is dan de methodes die ik gewend ben in Nederland. Daarnaast komen de leerlingen uit diverse landen. Velen hebben een Amerikaanse achtergrond, maar anderen een Nederlandse of een Koreaanse. Vandaag was er bij de *Geometry*-les een nieuwe leerling uit Zuid-Afrika. Er zijn nu vier leerlingen die *Geometry* volgen, een uit Nederland, een uit Amerika, een uit Singapore en een dus uit Zuid-Afrika. De voertaal is Engels. Dit is niet altijd even makkelijk voor mij, maar in een overmoedige bui zei ik wel eens: 'Het is wiskunde en wiskunde is internationaal.' Maar de taal is toch wel erg belangrijk.

Z- en F-hoeken

We behandelden deze week het hoofdstuk 'Parallel and perpendicular lines'. En je voelt wel aan dat dan ook de overstaande hoeken, de Z-hoeken en de F-hoeken aan de orde komen. Het begrip Z-hoeken en F-hoeken is in de onderbouw volledig ingeburgerd en ik denk dat elke leraar deze termen gebruikt. Ik verbaas me dan ook dat dit op het examen niet is toegestaan. Deze begrippen komen niet voor in de officiële lijst van toegestane termen en de leerling moet congruentie gebruiken.
De naamgeving is in deze methode totaal anders:



corresponding angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_3$ en $\angle B_3$
alternate interor angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_3$ en $\angle B_1$
alternate exterior angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_1$ en $\angle B_3$
consecutive interior angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_3$ en $\angle B_2$
vertical angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_1$ en $\angle A_3$

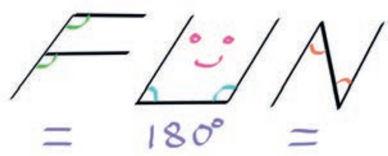
Voor deze begrippen zijn geen evenwijdige lijnen nodig. Als die er wel zijn, dan volgt er eerst een postulaat, het *corresponding angles postulate*: Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn (een *transversal*) dan zijn elk paar *corresponding angles* congruent, en daarmee ook even groot.
Opgemerkt moet worden dat de grootte van een hoek wordt aangegeven met $m\angle B_3$.

Stellingen

En dan volgt een drietal stellingen:
Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan

- is elk paar *alternate interior angles* congruent
- is elk paar *consecutive interior angles* supplementair
- is elk paar *alternate exterior angles* congruent.

De bewijzen zijn niet moeilijk en nadat ik die had behandeld, vertelde ik de studenten dat we in Nederland deze begrippen niet gebruiken. We noemen het Z-hoeken en F-hoeken en in een tekening maakte ik duidelijk waarom. Ze vonden dat wel aardig en voelden zich achtergesteld bij de Nederlandse leerlingen, omdat die deze moeilijke woorden niet hoeven te leren.
Katherine uit Zuid-Afrika kwam met een nog andere reactie. Ze keek eens goed naar de schetsjes van mijn Z- en F-hoeken en vertelde dat ze in Zuid-Afrika deze woorden ook niet gebruikten. Daar hadden ze een veel mooier woord voor deze hoeken: FUN.
Wiskunde is FUN is uit mijn hart gegrepen en daarom, neem ik me voor, praat ik nooit meer over F-hoeken en Z-hoeken, maar over FUN-hoeken. Misschien dat dit ooit in de officiële terminologie opgenomen kan worden.



Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. Dit schooljaar verblijft hij voor een jaar in China en zal hij ons van daaruit berichten.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

PUZZEL 92-5

KNIKKEN

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Als wiskundige krijg je op school al gauw de taak om te roosteren. Frans van Hoeve nam die taak ook op zich voor het maken van roosters voor een biljartcompetitie. Zijn bevindingen leidden tot allerlei mooie vragen en oplossingen die hij ons stuurde om er een puzzel van te maken. We maakten een selectie en ook enkele variaties op zijn bevindingen.

Het gaat om n teams van verschillende verenigingen en elk team speelt één wedstrijd tegen alle $n - 1$ andere teams. Dat noemen we een halve competitie. De wedstrijden worden gespeeld op verschillende speeldagen. Elk team speelt per keer ofwel thuis ofwel uit. De bedoeling is om dat zoveel mogelijk af te wisselen.
Als n even is ($n = 2k$) zijn er $2k - 1$ speeldagen. Ook als n oneven is ($n = 2k - 1$) zijn er $2k - 1$ speeldagen. In het laatste geval zal er dan op elke speeldag een team uitvallen.

Bij een ideaal rooster voor $n = 2k - 1$ teams speelt elk team afwisselend uit en thuis, en dat blijkt ook te kunnen.

Opgave 1- Maak een ideaal rooster voor vijf teams. Geef daarbij aan wie tegen wie speelt en wie uit dan wel thuis speelt.

Voor $n = 2k$ lukt het niet om te zorgen dat alle teams afwisselend uit en thuis spelen. Er zullen dus teams zijn die ofwel twee keer achter elkaar uit ofwel twee keer achter elkaar thuis spelen. Dat noemt Frans een ‘knik’.

Stelling 1 In een halve competitie voor $n = 2k$ teams zijn er altijd minstens $n - 2$ teams met minstens één knik.

Als die stelling klopt, dan is voor een even aantal van $n = 2k$ teams het beste rooster dat mogelijk is een rooster waarin er twee teams zijn zonder knik en $n - 2$ teams met precies één knik. Dat noemen we een optimaal rooster voor $n = 2k$.
Het is mogelijk een ideaal rooster van $n = 2k - 1$ om te bouwen tot een optimaal rooster voor $n = 2k$.

Opgave 2 - Maak een optimaal rooster voor zes teams.
Opgave 3 - Bewijs stelling 1.

We willen dit natuurlijk generaliseren.
Opgave 4a - Bepaal een algoritme om voor $n = 2k - 1$ een ideaal rooster te maken.
Opgave 4b - Bouw dit om tot een optimaal rooster voor $n = 2k$.

Voor $n = 2k$ gaan we nu onderzoeken hoe bij een optimaal rooster de knikken over het rooster zijn verdeeld. Voor $n = 2k$ geldt:

Stelling 2 In een optimaal rooster voor $n = 2k$ teams is het aantal knikken tussen twee speeldagen altijd 0 of 2.

Als dat aantal 2 is, dan is er uiteraard één team dat twee keer achter elkaar uit speelt en één team dat twee keer achter elkaar thuis speelt. We noemen dat een knikpaar.

Stelling 3 Er kunnen in een optimaal rooster nooit meer dan twee knikparen direct achter elkaar voorkomen.

Ter verduidelijking van stelling 3: in onderstaand fragment van een rooster komen twee knikparen direct achter elkaar voor, het paar 2, 5 na speeldag 1 en het paar 1, 3 na speeldag 2:

	T U	T U	T U
Speeldag 1	3 – 1	2 – 5	6 – 4
Speeldag 2	2 – 3	1 – 6	4 – 5
Speeldag 3	6 – 2	5 – 3	1 – 4

Opgave 5a - Bewijs stelling 2.
Opgave 5b - Bewijs stelling 3.

Frans vroeg zich ook af of er voor $n=2k$ meer dan één echt verschillend rooster mogelijk is. Om daar antwoord op te geven moeten we eerst vaststellen wat echt verschillende roosters zijn. Daarvoor kijken we naar een gevolg van stelling 1: Aan het einde van een optimale halve competitie met $n=2k$ teams zijn er $2k-1$ rondes geweest en hebben $2k-2$ teams één knik gehad en twee teams geen knik. Dat betekent dat er van de k teams die de eerste wedstrijd thuis speelden er $k-1$ in de laatste wedstrijd uit speelden en één thuis, en omgekeerd. En dus sluit de laatste ronde weer op de eerste aan met een knikpaar voor precies de twee teams die nog geen knik hadden.
We kunnen dus een optimaal rooster ook zien als een cykel waarin alle teams precies één knik hebben. Als we die cykel 'openknippen' tussen twee speeldagen waartussen een knikpaar zit, dan ontstaat weer een optimaal rooster. In de verschillende roosters die zo kunnen ontstaan zijn de speeldagen cyclisch verwisseld.
Ook krijgen we natuurlijk opnieuw een optimaal rooster als we in een bestaand optimaal rooster de volgorde van de speeldagen omkeren, van alle thuiswedstrijden uitwedstrijden maken en omgekeerd of een permutatie uitvoeren op de nummers van de teams.

Definitie: twee roosters zijn echt verschillend als de ene niet door cyclisch verwisselen van de speeldagen, het omkeren van de volgorde van de speeldagen, het verwisselen van alle uit- en thuiswedstrijden, een permutatie van de nummers van de teams of een combinatie daarvan in de ander kan overgaan.
Voor $n = 6$ blijken er geen echt verschillende optimale roosters te zijn, voor $n = 8$ of groter wel.

Opgave 6 - Laat zien dat er voor $n = 8$ wel echt verschillende optimale roosters bestaan.

Ten slotte had Frans in de praktijk nog heel wat andere voorwaarden. Zoals in het geval dat van een vereniging meerdere teams competitie spelen en het aantal biljarttafels beperkt is. Dan is ook het aantal thuis spelende teams per speeldag van die vereniging beperkt.
Als extra zou u daarover uw licht kunnen laten schijnen, bijdragen daaraan zijn welkom!

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op maandag 25 april binnen zijn.

vakbladeuclides.nl/925puzzel

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2017

di 7/4 — AMSTERDAM
Congres 'Leve de wiskunde'
Organisatie: Universiteit van Amsterdam

wo 17/5 — TILBURG
Fontys Wiskunde Event
Organisatie: Fontys lerarenopleiding Tilburg

22/5 t/m 9/6 — GRONINGEN
Tentoonstelling Imaginary

do 8/6 — AMSTERDAM
Publieksdag van de internationale conferentie over Complexe netwerken
Organisatie: Wiskunde Consortium Networks

ma 12/6 — UTRECHT
Onderwijs *meets* Onderzoek
Organisatie: NVvW, Freudenthal Instituut en SLO

2/7 t/m 7/7 — GRONINGEN
International workshop on statistical modelling
Organisatie: Rijksuniversiteit Groningen

vr 15/7 — EINDHOVEN
Finale wiskunde olympiade 2017

vr/za 25/8 t/m 26/8, vr/za 1/9 t/m 2/9 — AMSTERDAM (aug) en EINDHOVEN (sep)
Vakantiecursus 'De computer in de wiskunde: breekijzer of oud schroot?'

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 92

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	9 mei 2017	6 maart 2017
7	27 juni 2017	1 mei 2017

CASIO

Casio fx-82EX

Pretty in Pink...

Met een goed introductieaanbod!

De Casio fx-82EX onderscheidt zich door zijn enorme rekenkracht, hoge resolutie display, vele handige functies…en binnenkort ook zijn kleur. Voor het nieuwe schooljaar is deze krachtige calculator ook verkrijgbaar in roze. Wilt u hem als eerste ontvangen? Bestel dan nu en profiteer van ons introductieaanbod.

Introductie-aanbod

€ 6,95*

Bestel direct

Stuur een e-mail naar **educatie@casio.nl**. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer. Zodra de Casio fx-82EX in roze beschikbaar is (juni 2017) ontvangt u deze direct.

CLASSWIZ

*U betaalt slechts € 6,95 inclusief btw en verzending. Dit introductieaanbod is alleen geldig voor wiskundedocenten, 1 exemplaar per docent.